第 01 讲 平行线分线段成比例定理

一、基本原理（Fundamentals）

1. 比例的基本性质

如果 $a:b=c:d$，那么 $ad=bc$；

反过来，如果 $ad=bc(bd\neq 0)$，那么 $a:b=c:d$．

2. 合比性质

若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$．

3. 等比性质

若 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}$，且 $\sum_{i=1}^{n}y_i\neq 0$，则 $\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}y_i}=\frac{x_i}{y_i}(i=1,2,\cdots,n)$．

4. 平行线分线段成比例定理

三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.

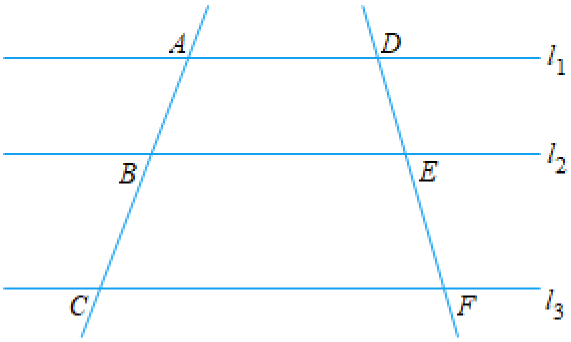

Figure 1.1

推论 1 平行于三角形一边的直线截其他两边，所得对应线段成比例.

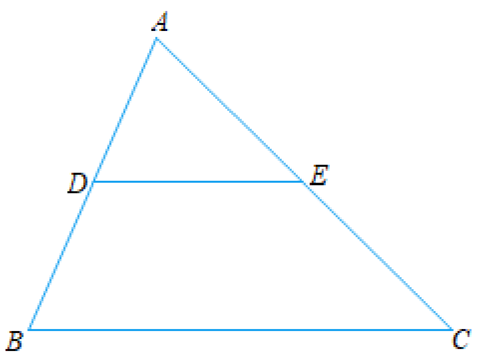

Figure 1.2

推论 2 平行于三角形的一边,并且和其他两边(或其延长线)相交的直线,所截得的三角形的三边与原三角形三边对应成比例.

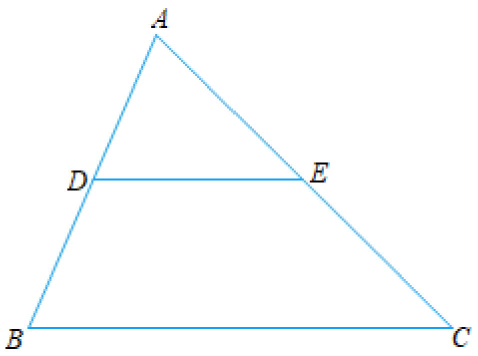

Figure 1.3A

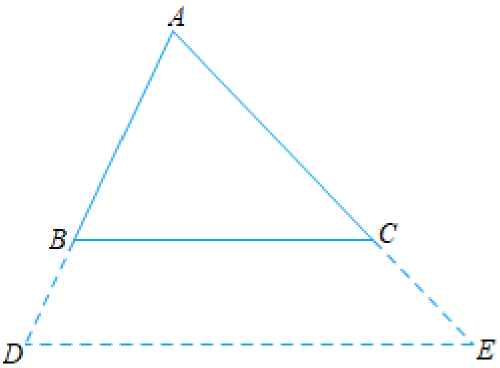

Figure 1.3B

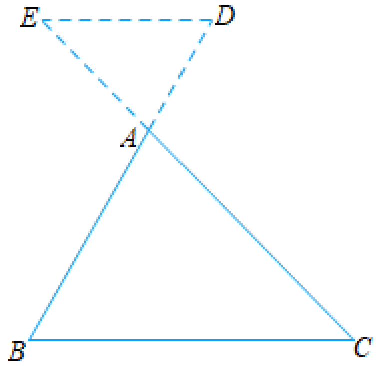

Figure 1.3C

推论 3 共点线束在两条平行线上所截得的线段对应成比例.

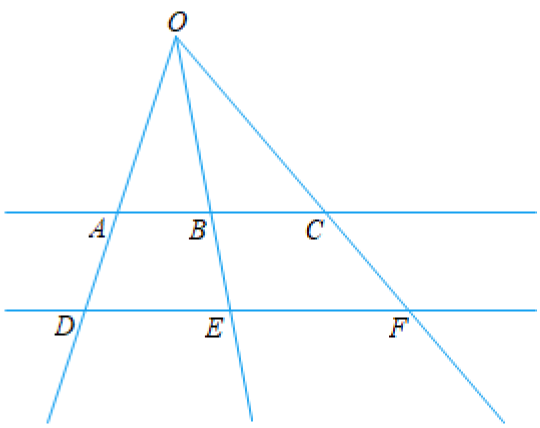

Figure 1.4A

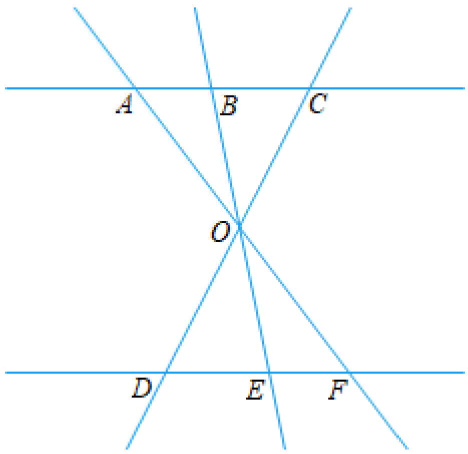

Figure 1.4B

5.三角形一边的平行线的判定

定理 如果一条直线截三角形的两边,其中一边上截得的一条线段和这边与另一边上截得的对应线段和另一边的比例,那么,这条直线平行于第三边.

推论 如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例,那么这条直线平行于三角形的第三边.

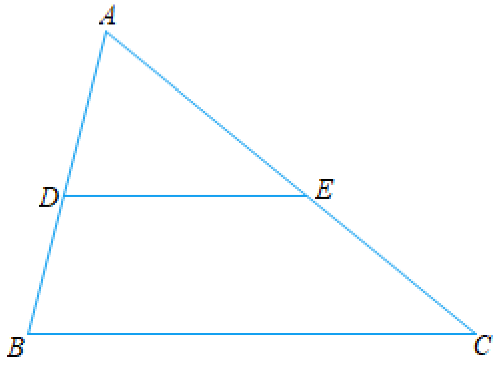

Figure 1.5

6.角平分线定理

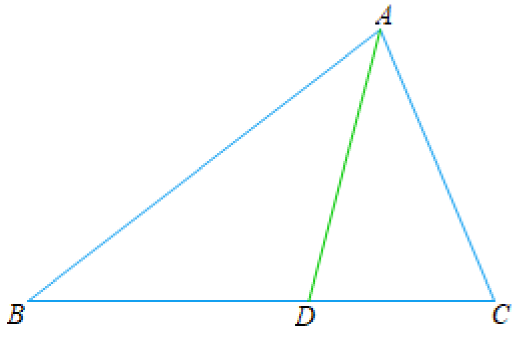

Figure 1.6A

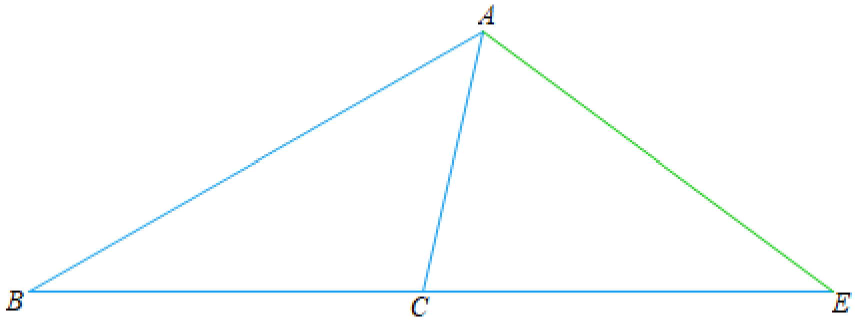

Figure 1.6B

7. 梅涅劳斯定理（Menelaus's　Theorem）

设 D 、 E 、 F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 CA 、 AB 或其延长线上的点，若 D 、 E 、 F 三点共线，则 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

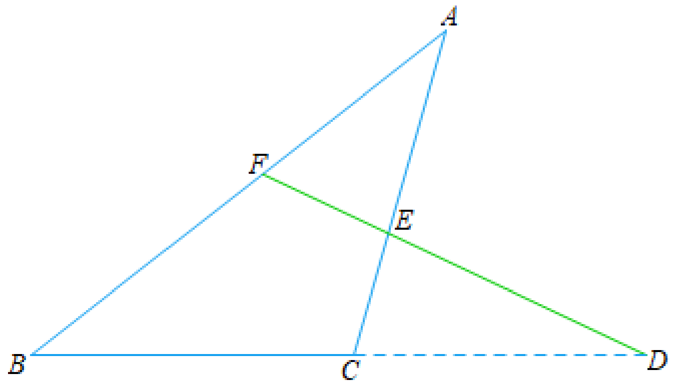

Figure 1.7

8. 塞瓦定理（Ceva's Theorem）

设 D 、 E 、 F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC 、 CA 、 AB 或其延长线上的点，若 AD 、 BE 、 CF 三直线共点（或互相平行），则 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

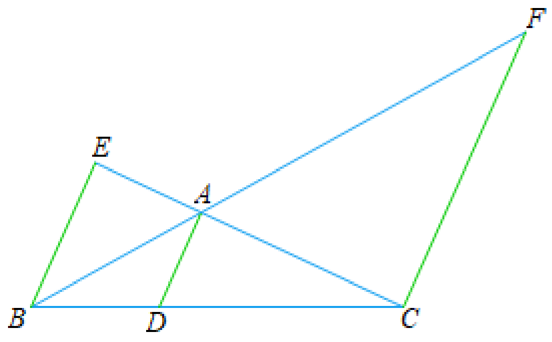

Figure 1.8A

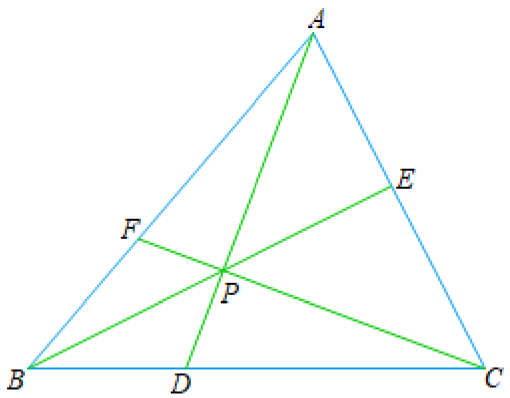

Figure 1.8B

二、典型例题（Typical examples）

1. 如图, $AB//CD$，AC 与 BD 交于 E，$EF//AB$，求证：$\frac{1}{EF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$.

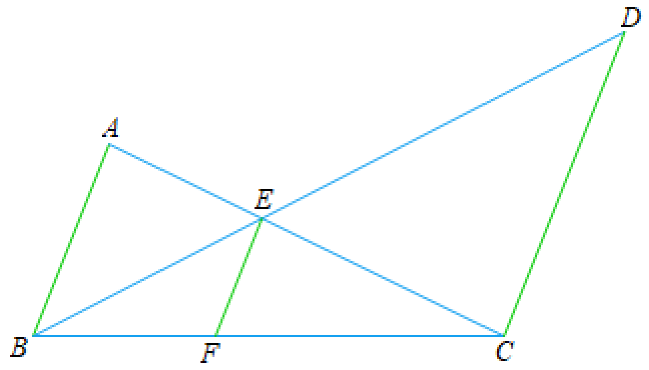

Figure 1.9

2. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB//CD$，AC 与 BD 交于点 O，E，F 是 AB 上的两点, 且 $OE//AD$，$OF//BC$．求证：$AE=BF$．

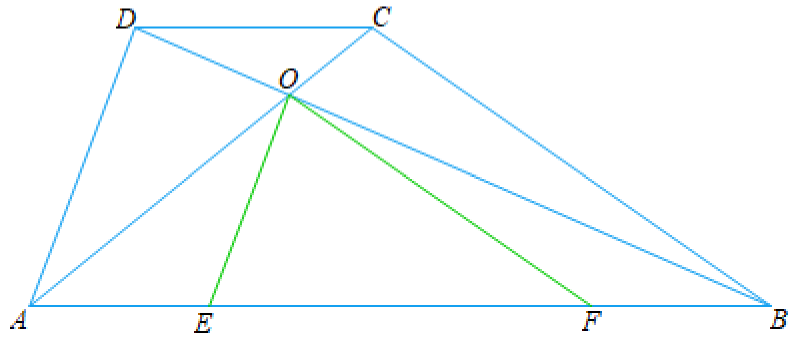

Figure 1.10

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 过 C 引 AB 的平行线 CD，使得 $CD=AC$，过 B 引 AC 的平行线 BE，使得 $BE=AB$，记 BD 与 AC 的交点为 P，CE 与 AB 的交点为 Q．求证：$AP=AQ$．

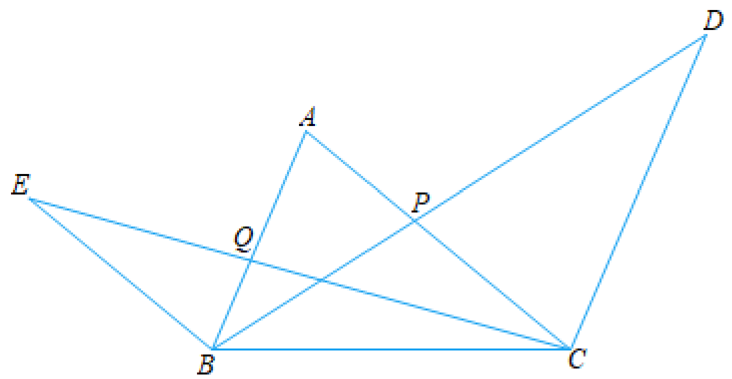

Figure 1.11

4. 在矩形 $ABCD$ 中，M，N 分别为 AD，BC 的中点，P 为 AC 上的动点，PN 的延长线与 AB 的延长线交于点 Q. 求证：$\angle PMN = \angle QMN$.

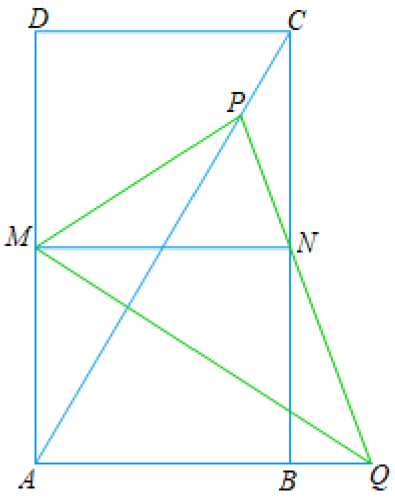

Figure 1.12

5. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AC = BC$，M 为 AB 边的中点，E 为 BC 上的动点，EM 的延长线与 DA 的延长线交于点 F. 求证：$\angle BCE = \angle ACF$.

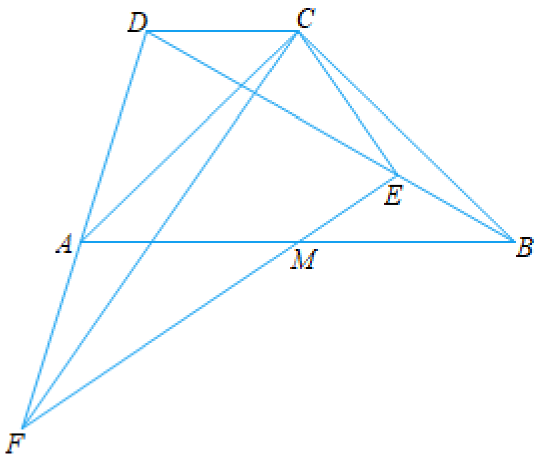

Figure 1.13