第 02 讲 定差幂线定理

一、基本原理（Fundamentals）

1.定差幂线定理

若直线 l 与线段 AB 垂直，C，D 为直线 l 上任意两点，则 $AC^2-AD^2=BC^2-BD^2$.

2.定差幂线轨迹定理

A、B 是平面内的两个定点，动点 P 满足 $PA^2-PB^2=k$（k 为常数），则点 P 的轨迹是与 AB 垂直的直线.

3.卡诺(Carnot)定理

D、E、F 分别在 $\triangle ABC$ 三边上，过 D、E、F 分别作各边的垂线，则这三条垂线共点的充要条件是：$AF^2+BD^2+CE^2=FB^2+DC^2+EA^2$.

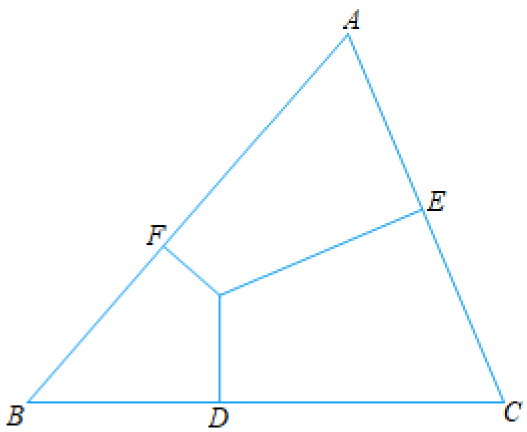

Figure 2.1

4. 两个三角形正交透视的对称性

已知$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$，从$\triangle A_1B_1C_1$的顶点A_1、B_1、C_1分别向$\triangle A_2B_2C_2$的边B_2C_2、C_2A_2、A_2B_2引垂线，若这三条垂线交于一点P，则称$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$是正交透视的，点P称为$\triangle A_1B_1C_1$关于$\triangle A_2B_2C_2$的正交透视中心.

若$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$是正交透视的，求证：$\triangle A_2B_2C_2$与$\triangle A_1B_1C_1$也是正交透视的.

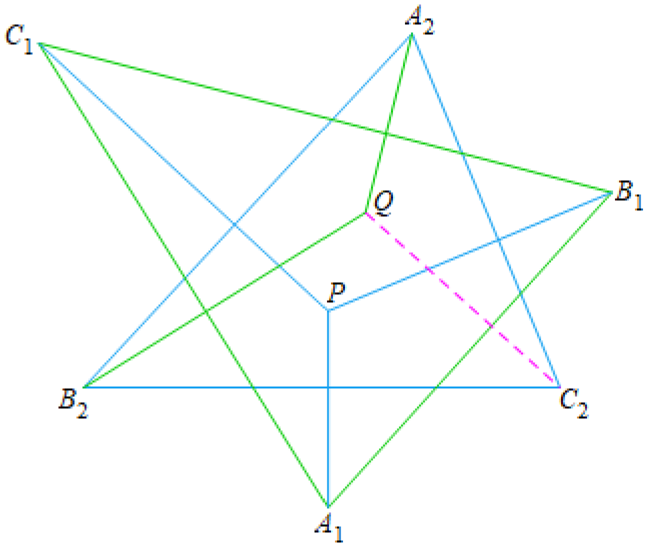

Figure 2.2

二、典型例题（Typical examples）

1. 已知点 P 是矩形 $ABCD$ 所在平面内的任意一点，求证：$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.

2. 已知 A、B、C 是两个同心圆上的点，若 $OA=OB=r$，$OC=R$，且 $AC\perp AB$，试探究 BC 的中点 M 的轨迹.

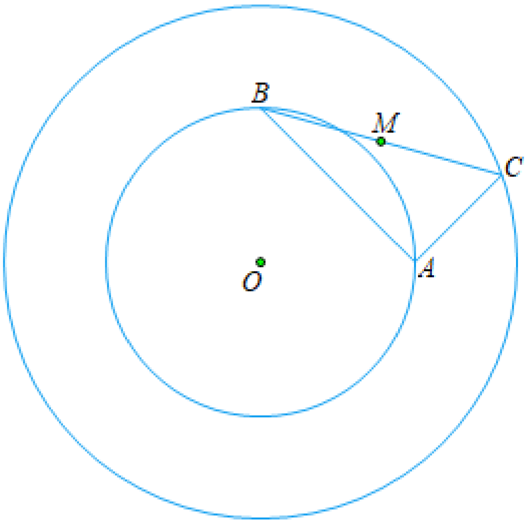

Figure 2.3

3. 在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别为边 AC、AB 的中点，若 $AB^2+AC^2=5BC^2$，求证：$BD\perp CE$.

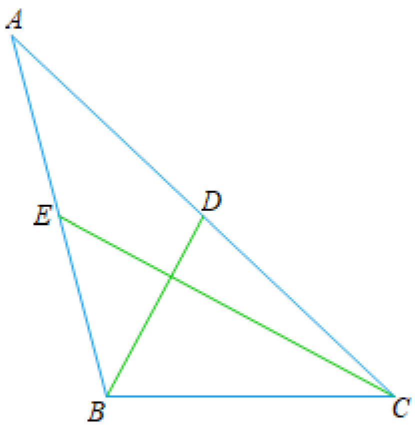

Figure 2.4

4. 在正方形 $ABCD$ 中, P 是对角线 AC 上的动点, 过 P 分别引 AB 、BC 的垂线, 垂足分别为 E 、 F , 求证: $DP \perp EF$.

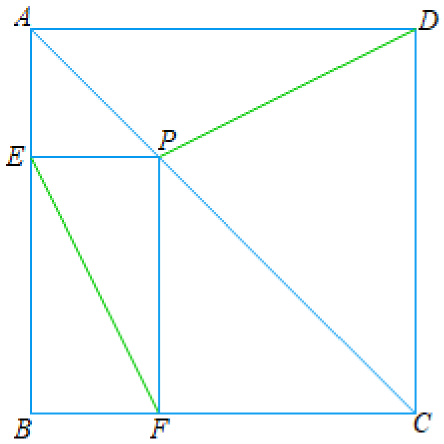

Figure 2.5

5. 如图, $\angle AEB = \angle ADC = 90^{\circ}$, $AD = AE$, 从 D 、 E 分别引 AC 、 AB 的垂线, 两条垂线交于点 F , 求证: $AF \perp BC$.

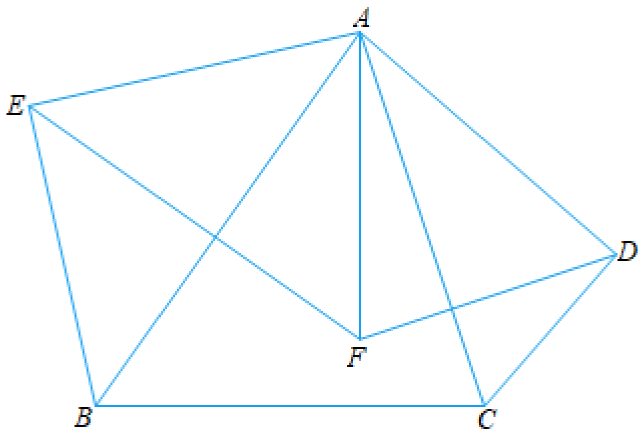

Figure 2.6