第 04 讲 共边定理与共角定理

一、基本原理（Fundamentals）

1.共边定理

若直线 AB 与 PQ 交于 R，则 $\dfrac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle BPQ}}=\dfrac{AR}{BR}$，$\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}=\dfrac{PR}{QR}$.

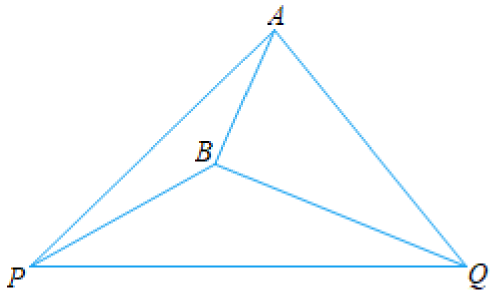

Figure 4.1A

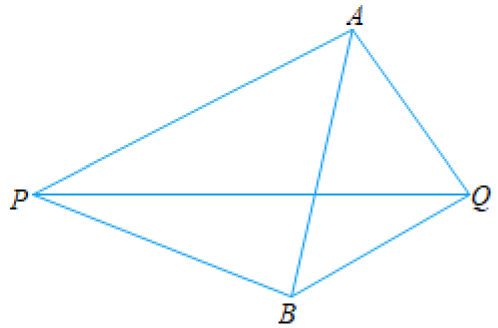

Figure 4.1B

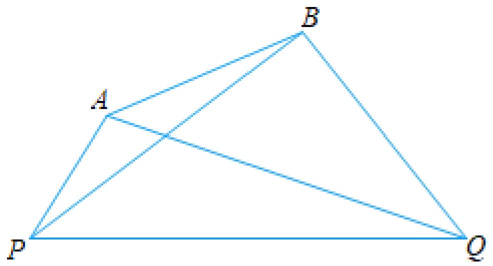

Figure 4.1C

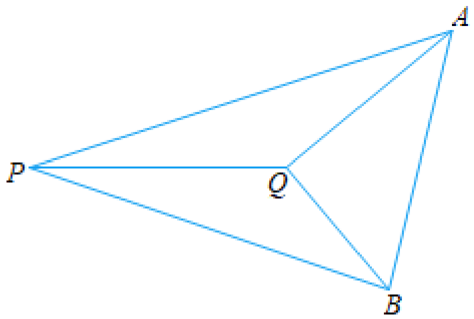

Figure 4.1D

2.共角定理

已知 D、E 分别为 AB、AC（或其延长线）上的点，则 $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}$.

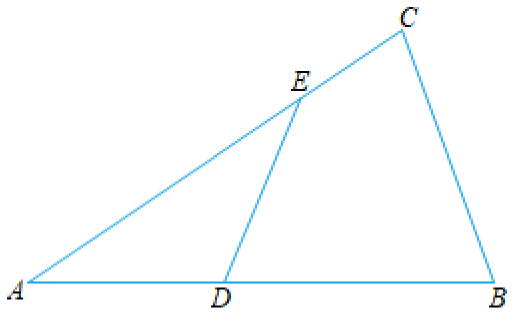

Figure 4.2A

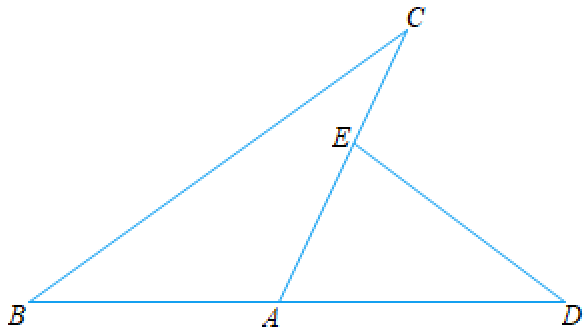

Figure 4.2B

3. 共边、共角定理的应用

3.1 梅涅劳斯定理(Menelaus's Theorem)

设 D、E、F 分别为△ABC 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上的点,若 D、E、F 三点共线,则 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

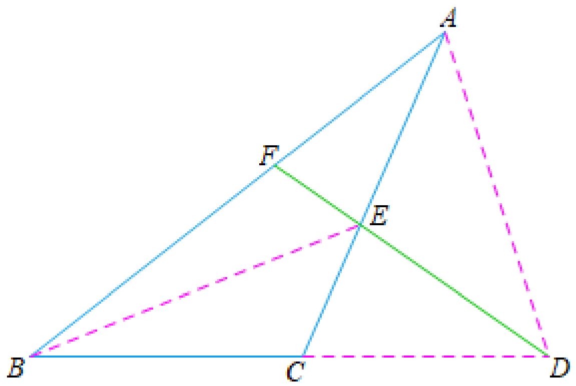

Figure 4.3A

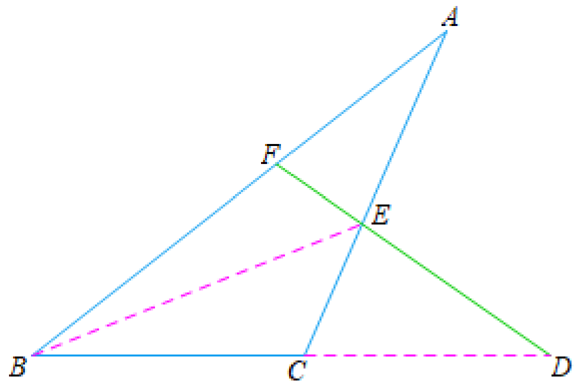

Figure 4.3B

3.2 塞瓦定理（Ceva's Theorem）

设 D、E、F 分别为△ABC 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上的点,若 AD、BE、CF 三直线共点(或互相平行),则 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

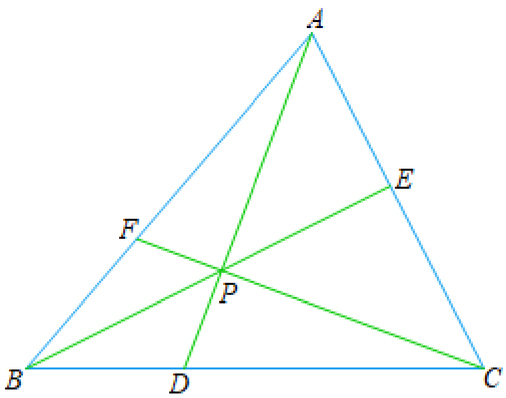

Figure 4.4

二、典型例题（Typical examples）

1. AB 是半圆 O 的直径, C, D 是弧 AB 上的两点, 且 $\tan\angle CAB\cdot\tan\angle DAB=\frac{1}{3}$, 求证: 直线 CD 过定点.

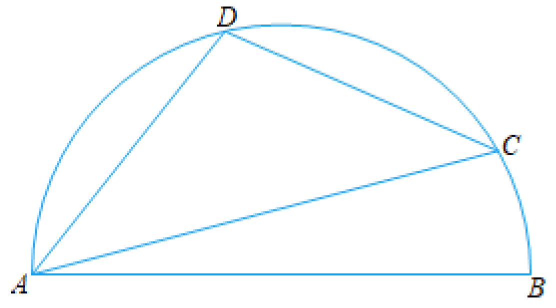

Figure 4.5

2. 在四边形 $ABCD$ 中, M、N 分别为 AB、CD 的中点, 直线 MN 分别与 AD、BC 交于点 E、F.

求证: $\frac{AE}{DE}=\frac{BF}{CF}$.

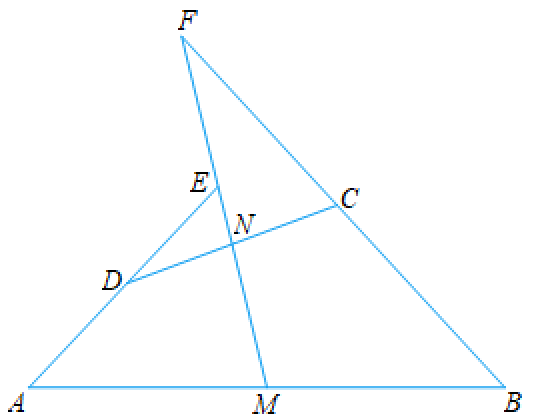

Figure 4.6

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 平行于 BC 边的直线分别与 AB、AC 交于点 D、E, BE 与 CD 交于点 P.

求证: AP 平分 BC 和 DE.

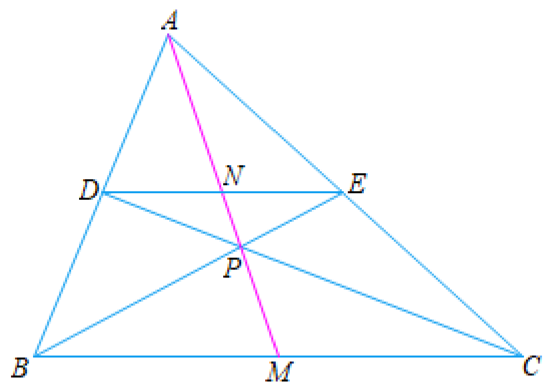

Figure 4.7

4. 在$\triangle ABC$中, D、E、F分别为BC、CA、AB上的点, 且AD、BE、CF交于点P.

(1) 求证: $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$;

(2) 若$\frac{PA}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{PC}{PF}=2020$, 求$\frac{PA}{PD}\cdot\frac{PB}{PE}\cdot\frac{PC}{PF}$.

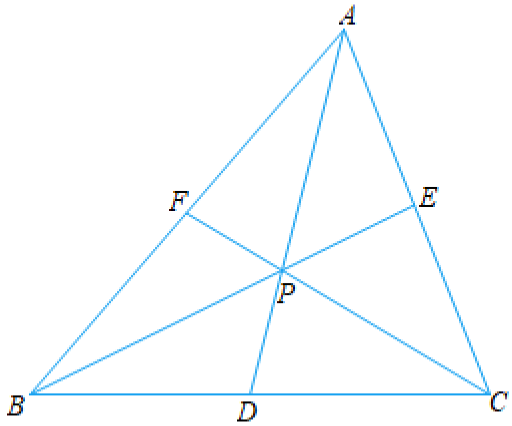

Figure 4.8

5. 在$\triangle ABC$中, D、E、F分别为BC、CA、AB上的点, EF与AD交于P, 且$\frac{BD}{DC}=\lambda$.

求证: $\frac{AD}{AP}=\frac{1}{1+\lambda}\cdot\frac{AB}{AF}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{AC}{AE}$.

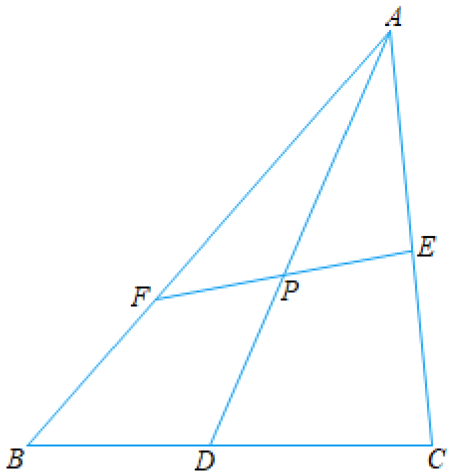

Figure 4.9