第 06 讲 相似

一、基本原理（Fundamentals）

1.相似三角形定义

对应角相等,对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形.

相似三角形对应边的比值叫做相似比(或相似系数).

1.1 顺相似

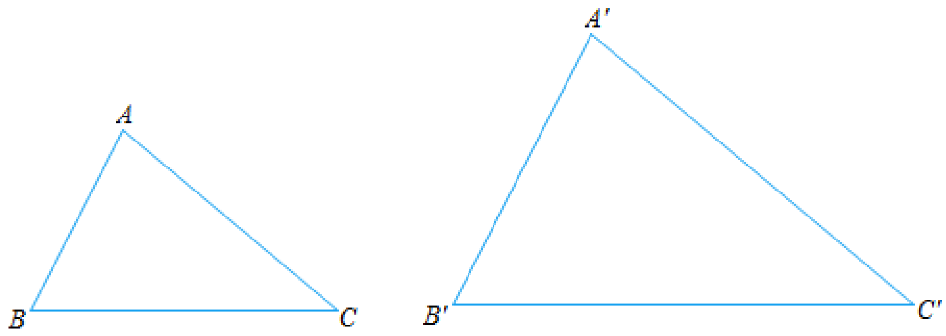

Figure 6.1A

1.2 逆相似

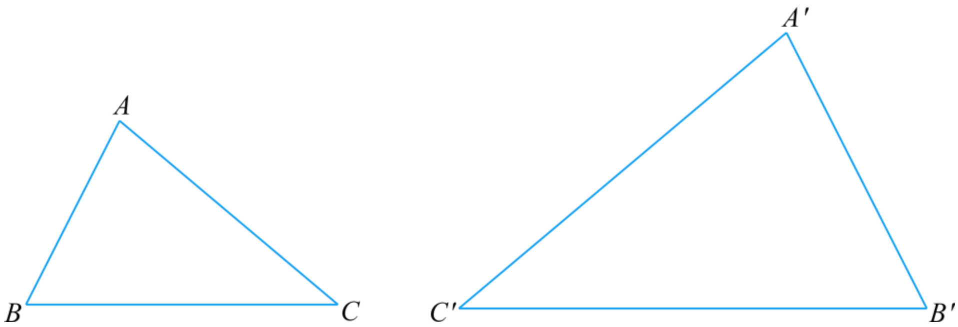

Figure 6.1B

2.相似三角形的判定

平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交,所构成的三角形与原三角形相似.

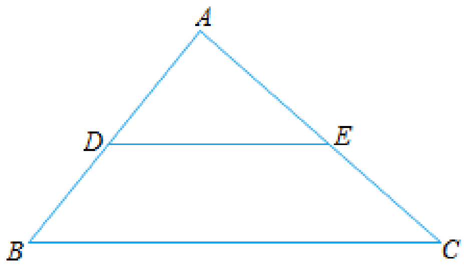

Figure 6.2

判定定理 1:对于任意两个三角形,如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等,那么这两个三角形相似.

简述为:两角对应相等,两三角形相似.

判定定理 2:对于任意两个三角形,如果一个三角形的两边与另一个三角形的两边对应成比例,并且夹角相等,那么这两个三角形相似.

简述为:两边对应成比例,且夹角相等,两三角形相似.

判定定理 3:对于任意两个三角形,如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例,那么这两个三角形相似.

简述为:三边对应成比例,两三角形相似.

3.特殊三角形的相似判定

定理:(1)如果两个直角三角形有一个锐角对应相等,那么它们相似;

(2)如果两个直角三角形的两条直角边对应成比例,那么它们相似.

定理:如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例,那么这两个直角三角形相似.

4.相似三角形的性质

相似三角形的性质定理:

(1)相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比等于相似比;

(2)相似三角形周长的比等于相似比;

(3)相似三角形面积的比等于相似比的平方.

5.常见的相似结构

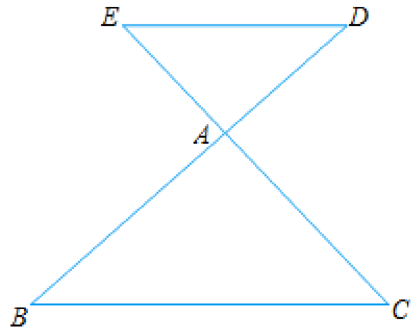

Figure 6.3A

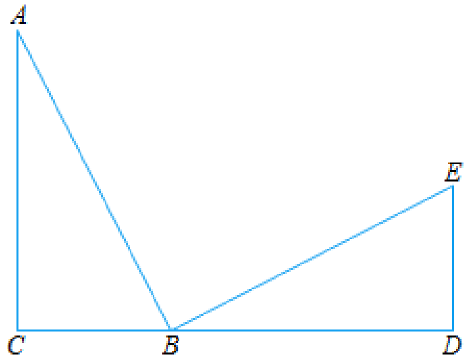

Figure 6.3B

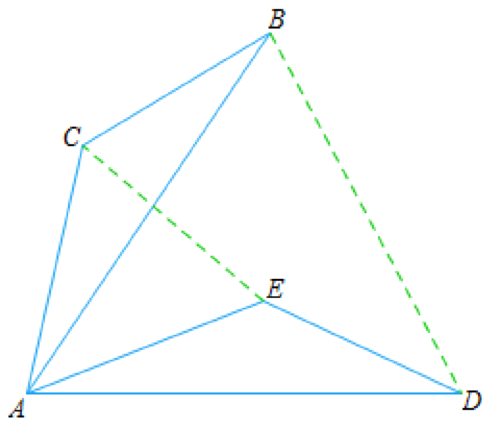

Figure 6.3C

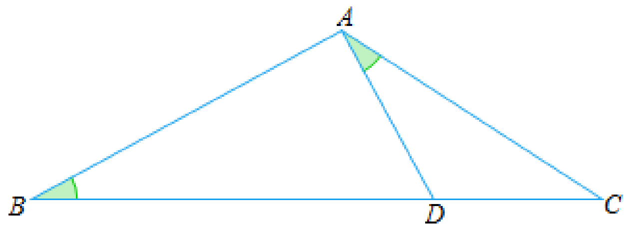

Figure 6.3D

6.借助相似证明托勒密定理

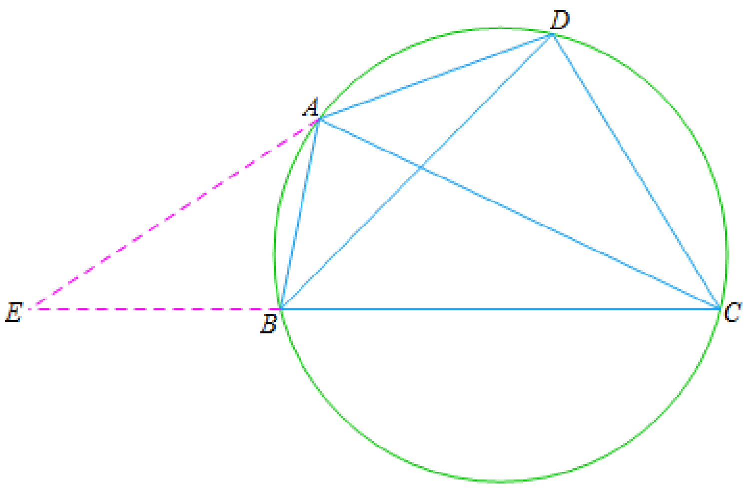

Figure 6.4

二、典型例题（Typical Examples）

1. 在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于 O，E、F 分别为 AB、CD 的中点，EF 分别与 BD、AC 交于 P、Q，求证：$OP \cdot AC = OQ \cdot BD$.

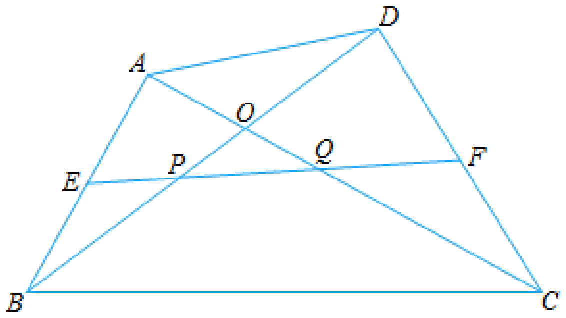

Figure 6.5

2. AB 与 CD 是圆 O 的两条互相垂直的直径，P 为弧 BC 上的动点，PA 与 CD 交于 E，PD 交 AB 于 F.

求证：四边形 $AEFD$ 的面积为定值.

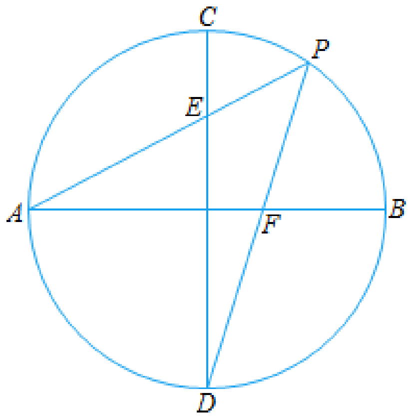

Figure 6.6

3. 在正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别在 AD、AB 上，且 $AE = AF$，$AG \perp BE$ 于 G，求证：$CG \perp FG$.

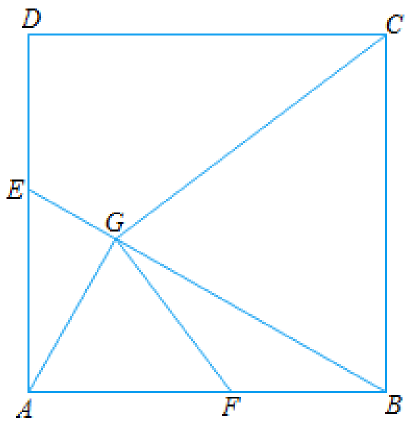

Figure 6.7

4. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=\angle ABC=90^\circ$，$E$、$F$ 在 AB 上，且 $AE=BF$，$DE\perp CE$。

求证：$\angle DCE=\angle BCF$。

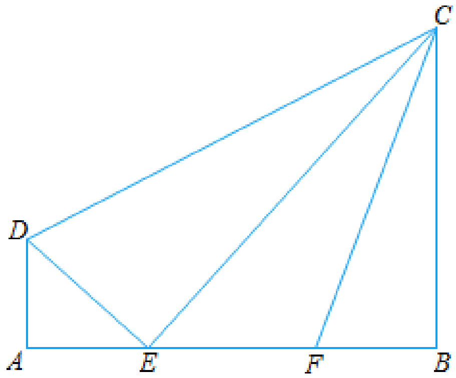

Figure 6.8

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(a,0)$、$B(\frac{1}{a},0)$，$P(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})$，求 $\frac{PB}{PA}$ 的值.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，E 为 AB 的中点，在 AB 的延长线上取一点 D，使得 $BD=BA$。

求证：$CD=2CE$。

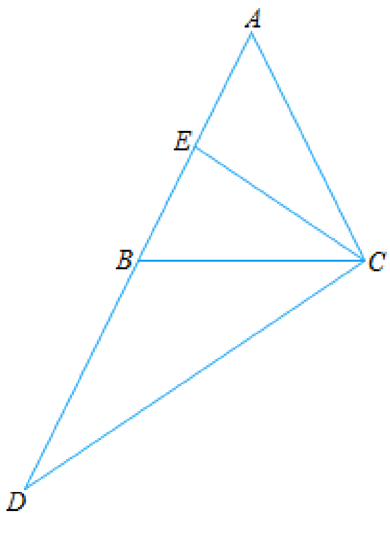

Figure 6.9

7. 在平行四边形 $ABCD$ 中，E 、 F 分别在 AB 、 AD 上，EF 交 AC 于 G .

求证：$\frac{AC}{AG}=\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}$ 。

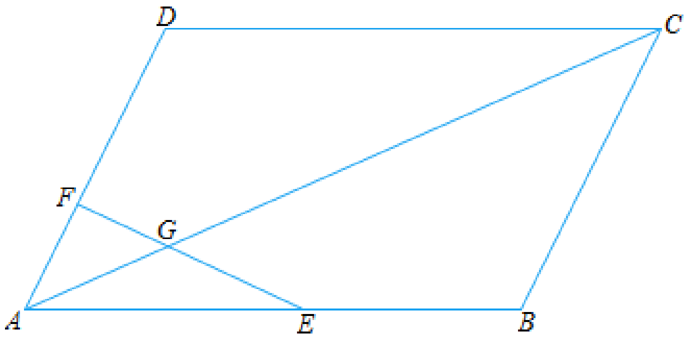

Figure 6.10

8. 在 $\triangle ABC$ 中，AD 是中线，任作一条直线分别交 AB 、 AC 、 AD 于 E 、 F 、 G .

求证：$\frac{AB}{AE}+\frac{AC}{AF}=2\frac{AD}{AG}$ 。

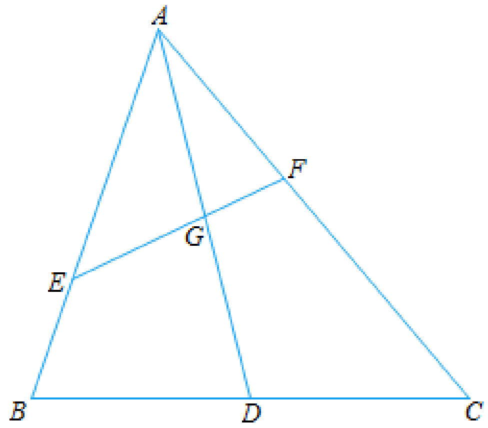

Figure 6.11A

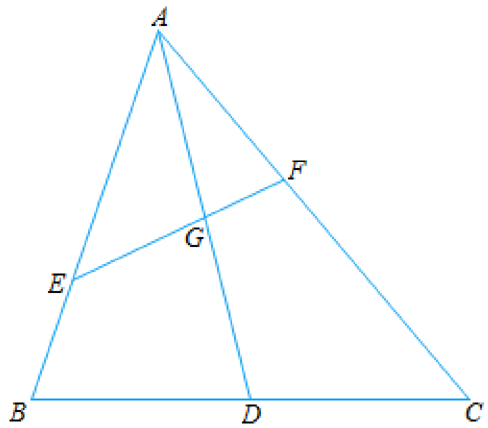

Figure 6.11B