

一元二次方程的判别式及其应用

VectorAB

引例：在 $\triangle ABC$ 中， $BC = a$ ， $CA = b$ ， $AB = c$ ，若 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

1. 已知 a 为实数，求证：下面的两个方程

$$x^2 - 45x + a^2 = 0,$$

$$x^2 - 2ax + 506 = 0,$$

至少有一个方程有实数根.

2. 已知 a, b, c 为实数, 且 $a \neq 0$, 若方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 无实数根, 试探究方程 $a^2x^2 + a(b+1)x + ac + b + 1 = 0$ 是否有实数根.

3. 已知 a, b 为整数, 且 $a^2 - ab + b^2 - 3a + 3 = 0$, 求 a, b 的值.

4. 方程 $x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5 = 0$ 的整数解的组数为_____.

试题来源：2021年北大强基

5. 已知 a, b, c 为实数, 且 $a + b + c = 0$, $abc = 1$, 用 $\max\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 中的最大值, 求证: $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$.

6. 已知 a, b 为实数, 且 $a^2 + b^2 = 5$, 求 $2a + b$ 的取值范围.

7. Let p be an odd prime. Find all positive integers n for which $\sqrt{n^2 - np}$ is a positive integer.

试题来源: Baltic Way 2018

8. 柯西不等式：已知 a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为实数，求证：

$$(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2.$$