韦达定理

1. 从数学史的视角看韦达定理

法国数学家韦达　发现了一元二次方程根与系数的关系

韦达在写于 1591 年、出版于 1615 年的《方程的理解与修正》中给出一系列根与系数关系的定理，其中第一个定理是关于一元二次方程的，该定理说:一元二次方程 $-x^2+px=q$（$p,q>0$）的两根之和等于 p，两根之积等于 q.

荷兰数学家吉拉尔 推广了一元二次方程根与系数的关系

1629 年，吉拉尔在《代数新发明》一书中讨论了一般 n 次方程根与系数的关系.

瑞士大数学家欧拉 首次给出了一元二次方程根与系数关系的严格证明

直到 18 世纪，瑞士大数学家欧拉在《代数基础》中首次给出了一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的根与系数关系的严格证明.

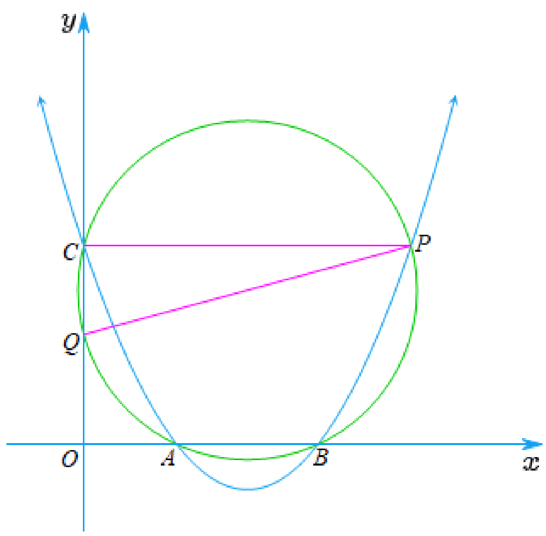
欧拉在《代数基础》中还讨论了韦达定理的应用:对于 $x^2+px+q=0$，根据 p 和 q 的符号，可判断两个根的正负情况.

苏格兰数学家华里斯补充了韦达定理在推导求根公式时的应用

19 世纪苏格兰数学家华里斯(W.Wallace，1768—1843)在为《大英百科全书》所写的“代数学”辞条中，沿用了欧拉的证明，但在欧拉基础上，补充了韦达定理在推导求根公式时的应用.

2. 几何视角下的韦达定理

苏格兰青年才俊卡莱尔(T.Carlyle，1795-1881)给出了求一元二次方程 $x^2+px+q=0$（$p^2\geq 4q$）实根的作图方法.

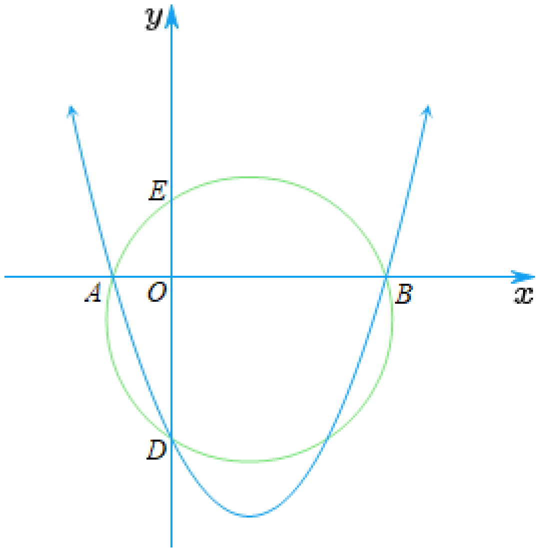


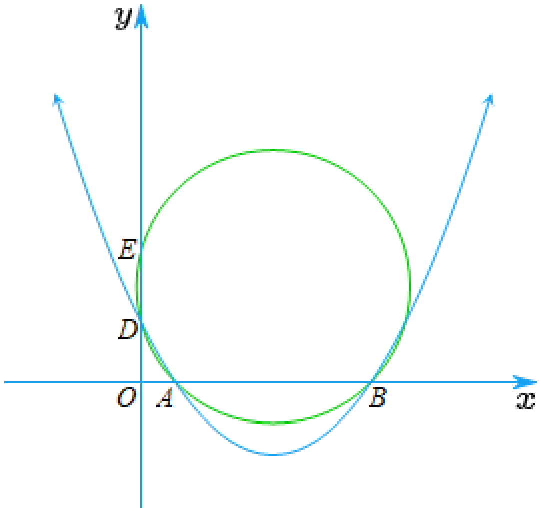
2-1. (2008 年江苏高考第 18 题) 在平面直角坐标系 xOy 中，设二次函数 $y=x^2-2x+b$ 的图像与两坐标轴有三个交点，经过这三个交点的圆记为 C.

(1) 求实数 b 的取值范围;

(2) 求圆 C 的方程;

(3) 问圆 C 是否经过某定点(其坐标与 b 无关)?请证明你的结论.





3. 一元二次方程根与系数之间的关系

已知 x_1， x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$， $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

3-1. 关于 x 的方程 $x^2+(a-1)x+b=0$ 有两个相等的实数根 a，求 b 的值.

3-2. 已知 a， b， c 为实数， $ac\neq 0$，且方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 x_1， x_2.

(1) 用 a， b， c 表示 $|x_1-x_2|$;

(2) 试给出一个以 $\dfrac{1}{x_1}$， $\dfrac{1}{x_2}$ 为根的一元二次方程.

3-3. 已知x_1，x_2是一元二次方程$4kx^2-4kx+k+1=0$的两个实数根，是否存在实数k，使得$(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-1$成立?若存在，求出k的值;若不存在，请您说明理由.

3-4. 已知k为实数，x_1，x_2是关于x的方程$(3k^2+4)x^2+6kx-9=0$的两个根.

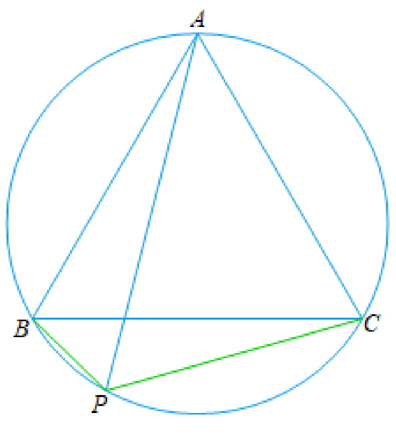
求$\dfrac{4x_2-x_1-kx_1x_2}{x_2-x_1}$的值.

4. 隐性结构下韦达定理的应用

4-1. 已知x_1，x_2是关于x的方程$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2(k^2-1)=0$的两个根，求$\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}$的值.

4-2. 已知$\triangle ABC$是正三角形，点P是$\triangle ABC$的外接圆的劣弧BC上的任意一点.

求证：$PA=PB+PC$.



4-3. 已知实数m， n（$m\neq -n$）满足$m^2-4m+1=0$， $n^2+4n+1=0$，求$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$的值.

4-4. 已知$(m-x_1)^2+(n-kx_1)^2=(kx_1)^2$，$(m-x_2)^2+(n-kx_2)^2=(kx_2)^2$，且$x_1x_2=4$，求$m^2+n^2$的值.

4-5. 已知$mn\neq 1$，且$5m^2+2021m+7=0$， $7n^2+2021n+5=0$，试求$\frac{m}{n}$的值.

5. 一元三次方程的根与系数的关系

已知x_1,x_2,x_3是一元三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$的三个根，则

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} & , \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}, & . \\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} & . \end{cases}$$

5-1. 已知方程$x^3-2x^2-3x+4=0$的三个根分别为a， b， c，求$(a+b)(b+c)(c+a)$的值.

5-2. 三个不同的实数 x， y， z 满足 $x^3-3x^2=y^3-3y^2=z^3-3z^2$，求 $x+y+z$ 的值.

5-4. 实数 a， b， c 满足 $a+b+c>0$， $ab+bc+ca>0$， $abc>0$，求证: $a>0$， $b>0$， $c>0$.

5-3. 若 α， β， γ 是 $x^3-x-1=0$ 的根，记 $S=\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}+\dfrac{1+\beta}{1-\beta}+\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}$ 的值.

5-4. 已知方程 $x^3+3x-1=0$ 的三个根分别为 α， β， γ，求 $\dfrac{1}{\alpha^3+\beta^3}+\dfrac{1}{\beta^3+\gamma^3}+\dfrac{1}{\gamma^3+\alpha^3}$ 的值.