

第1讲 平均值与抽屉原理

在小学、中学的各类数学竞赛书中，对抽屉原理有各种不同形式的表述，有的书还细分为第I型抽屉原理与第II型抽屉原理.其实抽屉原理的本质就是最大数 $\geq$ 平均数 $\geq$ 最小数.

在离散的情形中，表现形式通常有下列两种.

第一种： m 个球放入 n 个抽屉

结论为：有一个抽屉至少有 $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ 个球，有一个抽屉至多有 $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ 个球.

这里 $\lceil \cdot \rceil$ ， $\lfloor \cdot \rfloor$ 俗称“向上”与“向下”取整，即 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数， $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数.

第二种：若干个球任意放入 n 个抽屉

结论为：要保证有一个抽屉的球数 $\geq m+1$ ，则总球数 $\geq mn+1$.

要保证有一个抽屉的球数 $\leq m$ ，则总球数 $\leq (m+1)n-1$.

例1.已知 $t > 0$ ， $A = \frac{t^n - 1}{n}$ ， $B = \frac{t^{n+1} - 1}{n+1}$ ，其中 n 为正整数，试比较 A 与 B 的大小.

例2.已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $p \neq q$ ， $S_p = S_q$ ，求证： $S_{p+q} = 0$.

例3. (2015年高中数学联赛二试第二题) 设 $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 其中 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n ($n \geq 2$) 个互不相同的有限集合, 满足对任意 $A_i, A_j \in S$, 都有 $A_i \cup A_j \in S$. 若 $k = \min_{1 \leq i \leq n} |A_i| \geq 2$.

证明: 存在 $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, 使 x 属于 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少 $\frac{n}{k}$ 个集合.

例4. (2013年高中数学联赛二试第二题) 一次考试共有 m 道试题, n 个学生参加, 其中 $m, n \geq 2$ 为给定的整数, 每道题的得分规则是, 若该题有 x 个学生没有答对, 则每个答对该题的学生得 x 分, 未答对该题的学生得零分, 每个学生的总分为其 m 道题的得分的总和, 将所有学生总分排序为 $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$, 求 $p_1 + p_n$ 的最大可能值.

例5.一张试卷共有4道选择题，每道选择题有3个选项 a, b, c .一群学生参加考试，阅卷后发现，任何3人都有一道题的选项各不相同，试问考试的学生最多有多少人？

例6.证明存在正整数 n ，使 2021^n 的前四位数为2022，即 $2021^n = 2022 \dots$.

探索题

例7. 设空间中有 $3m(m \geq 2)$ 个点，其中任意四点都不共面，它们之间连有多少条线段，则这些线段至少构成一个四面体.