

第三讲 将复杂问题分解为若干简单问题

例1. 写出一个数列的通项公式, 使它的前四项为 $e, \pi, \sqrt[3]{101}, \lg 2$.

例2. 已知 m_1, m_2, \dots, m_n 是两两互质的正整数, a_1, a_2, \dots, a_n 是任意给定的整数. 证明

同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots\dots\dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

一定有解.

例3. 解一元四次方程 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 (a \neq 0)$.

例4. 仅仅刚学了任意角的三角函数的定义, 证明:

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

例5. 已知 $A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$, 求证:

$$\frac{\pi}{2} < A + B + C \leq 3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例6. 已知 $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R}^+$, $n = p + q + r$. 求证:

$$a^n + b^n + c^n \geq a^p b^q c^r + a^q b^r c^p + a^r b^p c^q.$$

如何培养将复杂问题分解或转化为简单问题的能力呢? 重要途径是将简单问题复杂化.

例7. p 为奇素数, 如何构造下面的同余等式

$$\sum_{r=0}^p \sum_{t=1}^p (-1)^{t-1} C_p^t C_t^r C_{p(p-t)}^{p(k-r)} \equiv C_{p^2}^{kp} \pmod{p^p}$$

其中 $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, 规定 $n < 0$ 或 $n > m$ 时 $C_m^n = 0$.

例8. 如何无中生有构成恒等式 $\sum_{i=0}^k C_m^i C_{m-i}^{k-i} C_{n-k}^{k-i} = C_m^k C_n^k$, 其中 $k \leq m \leq n$.