第四讲 特殊与一般

通常情形下，特殊问题相对于一般化后的问题往往比较简单。在遇到比较复杂的一般问题时，我们往往从特殊情形入手，然后思考一般情形能否转化为特殊情形，或解决特殊情形的思想方法能否用于一般情形。数学教师要注重培养学生将一些特殊命题扩展为一般命题的能力。

例1. 柯西不等式（特殊）

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots+y_n)\geq(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}+\cdots+\sqrt{x_ny_n})^2,$$

其中 $x_i,y_i\geq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

柯西不等式的推广（一般）

$$(x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n})(x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n})\cdots(x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn})$$

$$\geq(\sqrt[m]{x_{11}x_{21}\cdots x_{m1}}+\sqrt[m]{x_{12}x_{22}\cdots x_{m2}}+\cdots+\sqrt[m]{x_{1n}x_{2n}\cdots x_{mn}})^m$$

其中$x_{ij}\geq 0(1\leq i\leq m,1\leq j\leq n)$.

注：柯西不等式有很多证法，很自然会思考

1° 哪一种证法可用于其推广的证明.

2° 是否可用柯西不等式证明其推广.

柯西不等式可由平均不等式证明.

$$\sum_{i=1}^n\frac{\sqrt{x_i}}{\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}}\cdot\frac{\sqrt{y_i}}{\sqrt{y_1+y_2+\cdots+y_n}}$$

$$\leq\sum_{i=1}^n\frac{1}{2}(\frac{x_i}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\frac{y_i}{y_1+y_2+\cdots+y_n})$$

$$=1$$

其推广类似地可证明

$$\sum_{i=1}^n\frac{\sqrt[m]{x_{1i}}}{\sqrt[m]{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}}}\cdots\frac{\sqrt[m]{x_{mi}}}{\sqrt[m]{x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}}}$$

$$\leq\sum_{i=1}^n\frac{1}{m}\left(\frac{x_{1i}}{x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}}+\cdots+\frac{x_{mi}}{x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}}\right)$$

$$=1$$

用柯西证明其推广

$m=2^k$时，对k归纳易证.

一般情形，取k使 $m<2^k$，取$x_{li}=\sqrt[m]{x_{1i}x_{2i}\cdots x_{mi}}$，$m+1\leq l\leq 2^k$ 即可！

例2. 特殊命题

（1）已知$\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1.$

求证：$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma\le 3\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）已知$\alpha,\beta,\gamma\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=1.$

求证：$\alpha+\beta+\gamma\le 3\arctan\dfrac{1}{3}.$

一般命题

若函数$y=f(x)(x\in[b-a,b+a])$的图象关于点$(b,f(b))$对称，f在$[b,b+a]$上为凸（凹）函数.

若 $x_1,x_2\in[b-a,b+a]$ 且 $x_1+x_2\ge 2b$，则$f(x_1)+f(x_2)\ge 2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)(\le)$.

若 $x_1,x_2\in[b-a,b+a]$ 且 $x_1+x_2\le 2b$，则$f(x_1)+f(x_2)\le 2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)(\ge)$.

由这个一般命题，我们又可以编造很多特殊命题.

如：已知 $x,y,z\in[-1,1]$，$n\in\mathrm{N}$，且$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=1.$

求证：$x+y+z\le 3^{\frac{2n}{2n+1}}$.

已知 $x,y,z\in[-1,1]$，$n\in\mathrm{N}$，且$x^{\frac{1}{2n+1}}+y^{\frac{1}{2n+1}}+z^{\frac{1}{2n+1}}=1.$

求证：$x+y+z\ge\dfrac{1}{3^{2n}}$.

例3. 特殊命题

已知$a,b,c\in\mathrm{R}^+$，求证：

（1）$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$

（2）$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$

一般命题

已知$a,b,c\in R^+$，$n\in\mathrm{N}^*$，求证：$\dfrac{a^n}{b+c}+\dfrac{b^n}{c+a}+\dfrac{c^n}{a+b}\ge\dfrac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$

更一般地有:

已知$x_1,x_2,\cdots,x_m\in R^+$，$m\ge 2$，$n\in\mathrm{N}^*$，求证：

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{{x_i}^n}{\sum\limits_{j=1}^{m}x_j-x_i}\geq\frac{{x_1}^{n-1}+\cdots+{x_m}^{n-1}}{m-1}.$$

例4. 已知数列$\{a_n\}(n\in N^*)$满足$a_1=1$，$a_na_{n+1}=n+1$.

（1）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\geq\frac{7\sqrt{3}}{6}\sqrt{n+1}-2$（特殊）

（2）$k\in\mathrm{N}^*$，$n\geq k$ 时恒有

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\geq C_k\sqrt{n+1}-2\text{（一般）}$$

求C_k的最大值，并证明$C_k<\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

例5.（1）求证：$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2}$（特殊）

（2）p为$4n+3$型素数，求证：$\sum\limits_{\substack{(\frac{k}{p})=1\\1\leq k<p}}\cos\frac{2k\pi}{p}=-\frac{1}{2}$（一般）.

事物都是一分为二的。特殊问题往往是孤立的、静止的，而将无数个特殊问题有机地结合起来的一般问题往往是联系的、运动的、发展的。一般化后更易发现规律、更便于求解。

例6. 特殊命题

$A=\overbrace{99\cdots9}^{2022\text{个}9}\times38541237863297$，求$A$的数字和.

一般命题

$A=\overbrace{99\cdots9}^{n\text{个}9}\times a$，其中$a$为正整数，且$a$的位数$\leq n$，求$A$的数字和.

例7 求$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$（特殊）

求$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots(|x|\leq1)$（一般）

求$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{\sin nx}{n}+\cdots(0<x\leq\pi)$（一般）

例8. 求$\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots$（特殊）

求$\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{2^2+a^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+a^2}+\cdots$（一般）

求$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}\cos nx$.（更一般）