第五讲 整体与局部

整体：事物的全局和发展的全过程.

局部：事物的一部分和发展的各个阶段.

整体与局部既相互区别，又相互依赖、相互影响.整体是由局部构成的，局部是整体中的局部，它离不开整体.

整体功能状态及其变化会影响到局部的性能状态及其变化；反之局部的功能及其变化会影响到整体，关键部分的功能及其变化甚至对整体的功能起决定作用.

天下兴亡，匹夫有责

牵一发而动全身

一着不慎，全盘皆输

木桶理论：一个木桶由许多木板组成，木桶的容积取决于最短的那块木板.

这些经典语句无不体现整体与局部的辩证关系.

在数学中有许多能体现整体与局部辩证关系的数学思想：

中国剩余定理、拉格朗日插值公式—如何将各个局部粘合为整体.

抽屉原理—由整体到局部.

容斥原理—由局部到整体.

极端原理—关键部分的局部影响到整体.

在处理数学问题时，会出现以下三种情形.

1.整体处理：

要证明：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\notin Z$，我们只要将$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$计算出来，为$\frac{13}{12}$即可.

2.局部处理

要证明$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}\notin Z$，计算出$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}$太麻烦了，我们只要抓住$\frac{1}{97}$这个局部就可以了.

3.整体与局部结合起来处理

要比较$A=\frac{t^{n-1}+\cdots+t+1}{n}$与$B=\frac{t^n+t^{n-1}+\cdots+t+1}{n+1}(t>0)$的大小，整体看$A$与$B$都可以视为平均数，$B$是$A$中增加了一项$t^n$之后的平均数，再考察$B$的局部项$t^n$，可得

当$t>1$时，$B>A$;

当$t=1$时，$B=A$;

当$t<1$时，$B<A$.

例1.（2016高联二试第3题）给定空间10个点，其中任意4点不在一个平面上，将某些点之间用线段相连，若图形中没有三角形，也没有四边形. 试确定所连线段数目的最大值.

例2.已知$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$. 证明可选取$\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n\in\{-1,1\}$，使得

（1）$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i\right)^2\le\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$；

（2）$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i\right)^2\ge\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$.

例3.设正整数$n\ge 3$，已知n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，记两两之和为$b_{ij}=a_i+a_j(i>j)$，得到如下表格

$$\begin{array}{cccc}
 & b_{21} & & \\
b_{31} & b_{32} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n(n-1)}
\end{array}$$

在上述表格中任意取定k个数可以唯一确定出n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$. 求k的最小值.

例4. 设n为奇数，$n>1$，k是正整数，且对n的任一素因子p，有$p-1\nmid k$，记

$$S_k(n)=\sum_{\substack{i=1\\(i,n)=1}}^{n} i^k,$$

证明：$n|S_k(n)$.

例5. 集合$\{1,2,\cdots,n\}$的不含连续整数的k元子集共有$f(n,k)$个，求$F_n=\sum\limits_{k=0}^{n}f(n,k)$.

例6.（1）设图G有n个顶点，且不含三角形，则G的边数$\frac{n^2}{4}$.

（2）设图G有n个顶点，m条边，则图中至少有$\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right)$个三角形.

例7. 已知 p为奇素数，证明对任意p个整数$a_1,a_2,\cdots,a_p$，均存在整数k，使

$$a_1+k,a_2+2k,\cdots,a_p+pk$$

至少属于$\frac{p+1}{2}$个不同的模p的剩余类.

例8. 对$1,2,\cdots,2n$的任意一个排列$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，定义

$$f(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n)=\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i-a_{i+1}b_{i+1}|,$$

当$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$取遍$1,2,\cdots,2n$的所有排列时，

求$f(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n)$的最小值.

例9. 已知$p,q,r\in\mathrm{Z}^+$，$n=p+q+r$，$a,b,c\in\mathrm{R}^+$.

用局部和整体两种不同方法证明

$$a^n+b^n+c^n\geq a^pb^qc^r+a^qb^rc^p+a^rb^pc^q.$$

- END -