第六讲 生成函数与Bernoulli多项式

我们称

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots \text{或} a_0+a_1x+\frac{a_2}{2!}x^2\cdots+\frac{a_n}{n!}x^n+\cdots \qquad (1)$$

为数列

$$a_0，a_1，\cdots，a_n，\cdots \qquad (2)$$

的生成函数，这种生成函数是所谓形式幂级数，它可以像多项式那样作加，乘等运算，并约定

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+\cdots$$
$$\Leftrightarrow a_0=b_0，a_1=b_1，\cdots，a_n=b_n，\cdots.$$

我们关心的只是（1）中的系数，即数列（2）的性质，而不讨论（1）的收敛性.

第二类是将（有限的）正整数（或整数）数列

$$a_1，a_2，\cdots，a_n \qquad (3)$$

与函数

$$A_{\mathrm{e}}(x)=x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_n} \qquad (4)$$

对应.（4）称为（3）的指数生成函数.

第一类生成函数中，最常见的便是

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n.$$

用于研究二项式系数间的一些恒等式.

第二类生成函数主要用于涉及整数之和的一些问题.

设整数列a_1，a_2，$\cdots$，a_m与b_1，b_2，$\cdots$，b_n的生成函数分别是$A_{\mathrm{e}}(x)$和$B_{\mathrm{e}}(x)$，则整数列

$$a_i+b_j(1\le i\le m,1\le j\le n)$$

的生成函数是$A_{\mathrm{e}}(x)B_{\mathrm{e}}(x)$，$A_{\mathrm{e}}(x)B_{\mathrm{e}}(x)$中$x^k$的系数就是$a_i+b_j=k$的解数.

例1. 设$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_{2n}x^{2n}$，证明

$$a_k-C_n^1a_{k-1}+\cdots+(-1)^kC_n^ka_0=\begin{cases}0 & \text{若 } 3\nmid k\\ (-1)^lC_n^l & \text{若 } k=3l\end{cases}.$$

例2. 从$\{1,2,\cdots,n\}$中选出k项的严格递增数列，每相邻两项的差不大于m，且$m(k-1)<n$，有多少种不同的选法？

例3. 从n种不同的物品中取r个，如果允许重复选取同一种物品，一共有多少种取法.

例4. 证明$\sum\limits_{i=0}^{n-1}(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^i)(C_n^{i+1}+C_n^{i+2}+\cdots+C_n^n)=\dfrac{n}{2}C_{2n}^n$.

例5. 设$n>1$，两个有理数的n元集合（元素允许重复）$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\neq\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，而集合$\{a_i+a_j|1\leq i<j\leq n\}=\{b_i+b_j|1\leq i<j\leq n\}$（这里的相等计入元素的重数）. 证明：$n$是2的方幂.

例6. 用在多边形内部互不相交的对角线将凸多边形$A_1A_2\cdots A_n$分为$n-2$个三角形，有多少种分法？

下面我们来介绍Bernoulli多项式，并剖析如何想到它！

对于数列$\{a_n\}$，S_n表示其前n项和.

若S_n的表达式可求出，则$n\geq 2$时，a_n可表为S_n-S_{n-1}；反之，若a_n能表为$f(n)-f(n-1)$，则$S_n=f(n)-f(0)$.因此求S_n等同于将a_n裂项为$f(n)-f(n-1)$.裂项抵消法是数列求和的一般方法！

如何求$1^k+2^k+\cdots+m^k(\forall k\in Z^+)$呢？

对于某个具体的k，我们可用待定系数法将n^k 裂项为$f_k(n)-f_k(n-1)$，其中$f_k(n)$为n的$k+1$次多项式，比方说$f_1(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$f_2(n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. k 越大，裂项越困难！

能否整体考虑呢？

利用恒等式$\mathrm{e}^t=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^n}{n!}$ 有$\{x^n\}_{n\in\mathbf{N}}$的生成函数为$\mathrm{e}^{xt}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}t^n$.

对于每个$n\in\mathbf{N}$，要将x^n裂项为$f_n(x+1)-f_n(x)$的形式，只要将e^{xt}裂项！

由$\mathrm{e}^{(x+1)t}-\mathrm{e}^{xt}=\mathrm{e}^{xt}(\mathrm{e}^t-1)$，有$\mathrm{e}^{xt}=\dfrac{\mathrm{e}^{(x+1)t}}{\mathrm{e}^t-1}-\dfrac{\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t-1}$，

若令$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t-1}$，则 $\mathrm{e}^{xt}=f(x+1)-f(x)$， 若能将$f(x)$展开为$t$的幂级数$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n(x)}{n!}t^n$， 则有$x^n=a_n(x+1)-a_n(x)$. 可惜的是$\dfrac{\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t-1}$不能展开为$t$的幂级数，这是因为$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t-1}=1$ 不存在.

注意到 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{t}=1$，$\dfrac{t\cdot\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t-1}$可展开成 t 的幂级数.

令$\dfrac{t\cdot e^{xt}}{e^t-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{B_n(x)}{n!}t^n$，则

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n(x+1)-B_n(x)}{n!}t^n=t\cdot e^{xt}=t\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}t^n$$

比较t^{n+1}的系数，有

$$x^n=\frac{1}{n+1}[B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)].$$

取$x=0$知$B_{n+1}(1)=B_{n+1}(0)$，

从而$1^n+2^n+\cdots+m^n=\dfrac{1}{n+1}(B_{n+1}(m+1)-B_{n+1}(0))$， $B_n(x)$称为Bernouli多项式. $B_n=B_n(0)$称为Bernoulli数.

B_0，B_1，$\cdots B_n$，$\cdots$的生成函数为$\dfrac{t}{e^t-1}$，

$B_0(x)$，$B_1(x)$，$\cdots$的生成函数为$\dfrac{te^{xt}}{e^t-1}$，

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n(x)}{n!}t^n=\frac{t}{e^t-1}\cdot e^{xt}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}t^n\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}t^n,$$

比较两端t^n的系数，得

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_{n-k}x^k(n\geq 0) \qquad (*)$$

因此$B_n(x)$是关于x的n次多项式.

若形式地定义$(1+B)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kB_k$，则

当$n\geq 2$时

$$(1+B)^n=B_n,$$

从而有递推关系.

$$-nB_{n-1}=B_0+C_n^1B_1+\cdots+C_n^{n-2}B_{n-2}(n2) \qquad (**)$$

其中$B_0=1$，$B_1=-\dfrac{1}{2}$.

当$n\geq 3$且n为奇数时，

$$B_n=0,$$

由（**）有$B_2=\dfrac{1}{6}$，$B_4=-\dfrac{1}{30}$，$B_6=\dfrac{1}{42}$，$B_8=-\dfrac{1}{30}$，$B_{10}=\dfrac{5}{66}$，$B_{12}=-\dfrac{691}{2730}$，

由（*）有$B_0(x)=1$，$B_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$，$B_2(x)=x^2-x+\dfrac{1}{6}$，$B_3(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$，

$B_n{}'(x)=n\cdot B_{n-1}(x)$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k+1}\dfrac{(2\pi)^{2k}}{2\cdot(2k)!}B_{2k}$.