数论中的局部化

设p是一个素数，$n\in Z^*$，$\alpha\in N$，$p^\alpha||n\Leftrightarrow\begin{cases}p^\alpha|n\\p^{\alpha+1}\nmid n\end{cases}$.

此时我们称n在p处的指数赋值为α，记为$V_p(n)=\alpha$.

V_p可视为$Z^*\to N$的一个函数，它具有性质.

（i）$V_p(mn)=V_p(m)+V_p(n)$，

（ii）$V_p(-m)=V_p(m)$,

（iii）$V_p(m_1+m_2+\cdots+m_k)\geq\min\{V_p(m_1),V_p(m_2),\cdots,V_p(m_k)\}$,

特别地，当 $V_p(m_1)$，$\cdots$，$V_p(m_k)$有一个小于其它任一个，

比妨说 $V_p(m_1)<V_p(m_i)$，$2\leq i\leq k$时，

$$V_p(m_1+m_2+\cdots+m_k)=V_p(m_1)$$

此特殊情况在高中数学竞赛中占有非常重要的地位！

由性质i），我们可将V_p 扩充定义为$V_p:Q^*\to Z$，$\forall m,n\in Z^*$,

$$V_p(\frac{n}{m})=V_p(n)-V_p(m).$$

扩充定义后，性质i），ii），iii）仍成立.

常用到的结论有

$1°.V_P(n!)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$

此等式右边每项依次可解释为1，2，$\cdots$，n中恰为p，p^2，p^3，$\cdots$的倍数的个数.

对于$1\leq m\leq n$，若$p^\alpha||m$，则m在$V_p(n)$中的贡献为α，在$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots$中的贡献也为$\alpha$，故等式成立.

$2°.\ V_p(n)=\frac{n-\tau_p(n)}{p-1}$，其中$\tau_p(n)$为将$n$ p表示为p进制后其数字和.

证：设$n=(a_ka_{k-1}\cdots a_1a_0)_p$，$0\leq a_i\leq p-1$，$0\leq i\leq k$，则

$\left[\frac{n}{p}\right]=\frac{n}{p}-\frac{a_0}{p}$

$$\left[\frac{n}{p^2}\right]=\frac{n}{p^2}-\frac{a_1}{p}-\frac{a_0}{p^2}$$

$$\left[\frac{n}{p^3}\right]=\frac{n}{p^3}-\frac{a_2}{p}-\frac{a_1}{p^2}-\frac{a_0}{p^3}$$

……

将上述等式相加，右边按分子分类相加，得

$V_p(n!)$

$=n(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots)-(a_0+a_1+\cdots)(\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p^2}+\cdots)$

$=\dfrac{n-(a_0+a_1+\cdots)}{p-1}$

$=\dfrac{n-\tau_p(n)}{p-1}$

3°.已知$x\in Q^*$，则$x\bar{\in}Z\Leftrightarrow\exists$ 素数 $p,V_p(x)<0.$

4°. $V_p(C_n^k)=\dfrac{\tau_p(k)+\tau_p(n-k)-\tau_p(n)}{p-1}$

例1.（1）求证$\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{100}\bar{\in}\mathbb{Z}$

（2）求证$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{n}\bar{\in}\mathbb{Z}$，其中$m,n\in N^*$，$m<n$.

证：（1）因为$V_2(\frac{1}{64})=-6$，

而$V_p(\frac{1}{i})>-6(10\leq i\leq 100$ 且 $i\neq 64)$，

$\therefore V_2(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{100})=-6<0$，

$\therefore \frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{100}\bar{\in}\mathbb{Z}$.

评析：不需考虑 $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{100}$的计算结果即整体情况，而是专门攻击它在某素因子的指数赋值即局部情况！此小题也可考虑V_3，V_{97}等. 但考虑V_5就不是很好，为什么？

（2）令$\alpha=\max\{V_2(m),V_2(m+1),\cdots,V_2(n)\}$，则$\alpha\geq 1$

若存在$m\leq i<j\leq n$，使$V_2(i)=\alpha=V_2(j)$

则可设$i=2^{\alpha}(2i_1-1)$，$j=2^{\alpha}(2j_1-1)$

其中$i_1,j_1\in N^*$且$i_1<j_1$

但$m\leq i<2^{\alpha}\cdot 2i_1<j\leq n$，且$V_2(2^{\alpha}\cdot 2i_1)\geq\alpha+1$，与$\alpha$的定义矛盾.

$\therefore V_2(m)$，$V_2(m+1)$，$\cdots$，$V_2(n)$中仅有一个能取到α，$V_2(\frac{1}{m})$，$V_2(\frac{1}{m+1})$，$\cdots$，$V_2(\frac{1}{n})$中仅有一个能取到$-\alpha$.从而$V_2(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{n})=-\alpha<0$.从而结论成立.

例2. 设k，l是给定的两个正整数.证明：有无穷多个正整数$m(m \geq k)$，使$(C_m^k, l) = 1$.

例3. 设k是给定的正整数，$r=k+\dfrac{1}{2}$. 记

$$f^{(1)}(r)=f(r)=r\lceil r\rceil，f^{(l)}(r)=f(f^{(l-1)}(r))，l\geq 2.$$

证明：存在正整数m，使得$f^{(m)}(r)$为一个整数.这里$\lceil x\rceil$表示不小于x的最小整数.

例4. 证明：对于任意$n \geq 4$，存在一个 n 次多项式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0，$$

具有如下性质：

（1）a_0，a_1，$\cdots$，a_{n-1}均为正整数；

（2）对$\forall m \in Z^+$，及任意$k(k \geq 2)$个互不相同的正整数r_1，$\cdots$，r_k，均有

$$f(m) \neq f(r_1) \cdots f(r_k).$$

例5. 设p是奇素数，$g(x)\in Z[x]$，$\deg(g(x))=m$，$k\in Z^{+}$.

设$\dbinom{g(px)}{k}=\sum\limits_{i=0}^{mk}C_i\dbinom{x}{i}$ （*），其中$\dbinom{x}{i}=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}$.

证明：$C_j\in\mathbb{Z}$且$p^{j-\left[\frac{k}{p}\right]}|C_j(j=0,1,\cdots,mk)$.

例6. 求具有下述性质的所有正整数k，对任意正整数n

$$2^{(k-1)n+1} \nmid \frac{(kn)!}{n!}.$$

例7. 设a_1，a_2，$\cdots$ 是一个无限项正整数序列，已知存在整数$N>1$，使得

对每个整数$n \geq N$，$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$都是整数.

证明：存在正整数M，使得$a_m=a_{m+1}$对所有整数 $m \geq M$都成立.