平面几何讲义

老封(叶中豪)

知识要点

三角形的几个特殊点

（1）外心——三角形三条边的中垂线相交于一点，称为“外心”，通常记作 O；外心到三角形的三个顶点等距，是三角形外接圆的圆心。

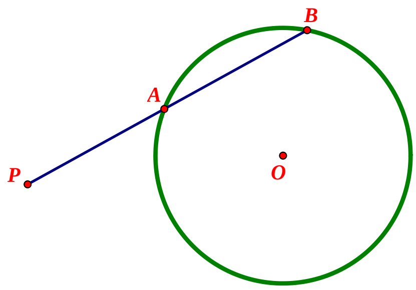
（2）垂心——三角形的三条高相交于一点，称为“垂心”，通常记作 H。

（3）重心——三角形三条中线相交于一点，称为“重心”，通常记作 G；各中线被重心分成 2∶1 两部分。

（4）内心——三角形三条内角平分线相交于一点，称为“内心”，通常记作 I；内心到三角形的三边等距，是三角形内切圆的圆心。

（5）旁心——三角形一个角的内角平分线和另外两角的外角平分线相交于一点，通常记作 I_a、I_b、I_c；旁心是三角形旁切圆的圆心。

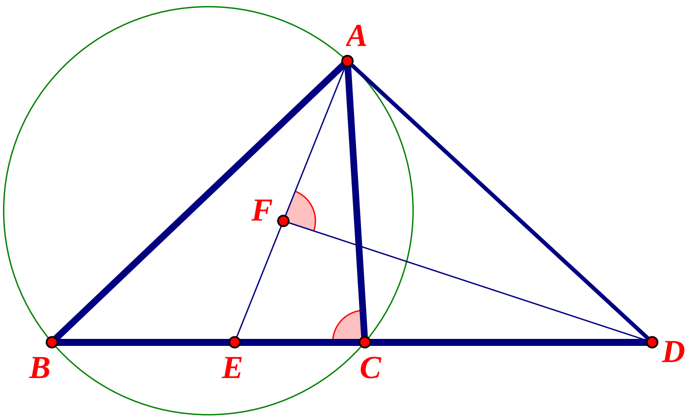
圆幂：已知定点 P 和定⊙O，自 P 任作⊙O 的一条割线 PAB，则 $\overline{PA}\times\overline{PB}$ 为定值，定值就称为 P 点关于⊙O 的幂（power），记为 $p_{\odot O}(P)$。



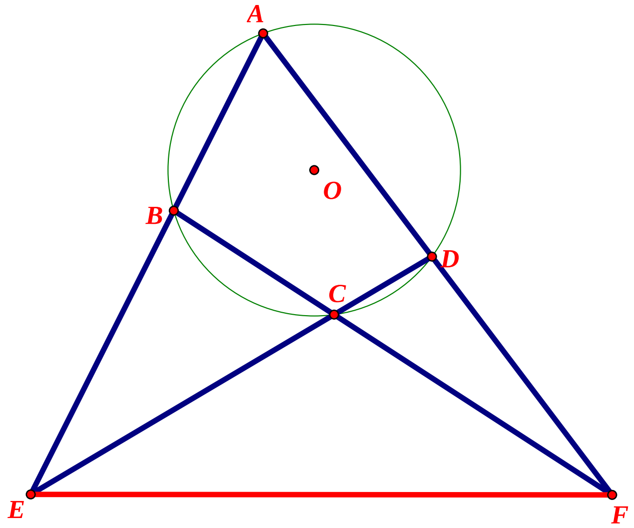
圆幂公式：$p(P)=PO^2-r^2$。

例题和习题

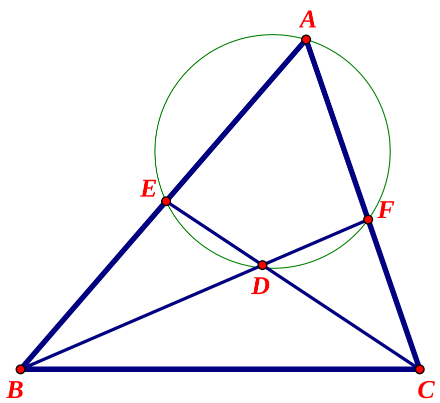
1. 如图，△ABC 外接圆在 A 点处的切线与 BC 延长线交于 D，点 E 在 BC 上，点 F 在 AE 上，满足 BE·CD＝AE·AF。求证：∠AFD＝∠ACB。



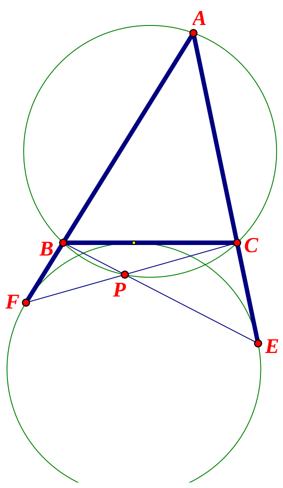
2. 如图，⊙O 的内接四边形 ABCD 的两组对边延长分别交于 E、F 两点。
求证：$EF^2=EA\cdot EB+FA\cdot FD$。



3. 如图，△ABC 中，点 E、F 分别在 AB、AC 上，BF、CE 交于 D。
求证：A、E、D、F 共圆的充要条件是 $BC^2=BE\cdot BA+CF\cdot CA$。

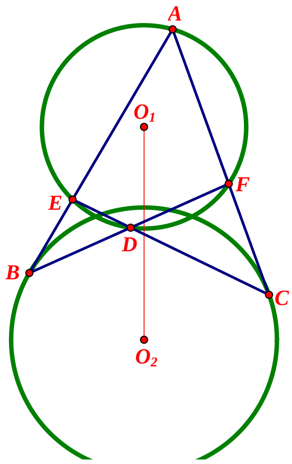


4. 设△ABC 的 A-旁切圆与直线 AC、AB 分别切于 E、F，BE 与 CF 交于点 P。
求证：点 P 在△ABC 外接圆上的充要条件是△ABC 的 A-旁切圆半径与外接圆半径相等。



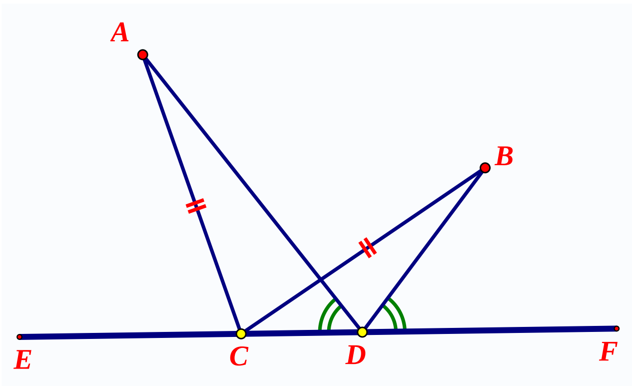
5. 设⊙O_1、⊙O_2半径分别为r_1、r_2，自⊙O_1上一点 A 作⊙O_2的切线 AB、AC（B、C 为切点），AB、AC 分别另交⊙O_1于 E、F，联 BF、CE 交于 D 点。

求证：D 点在⊙O_1上的充要条件是$r_1^2+2r_2^2=O_1O_2^2$。



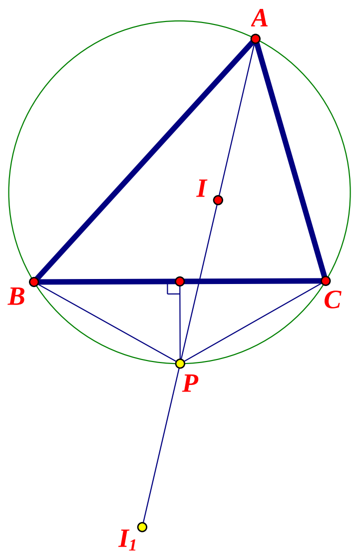
6. 如图，点 A、B 在直线 EF 同侧，C、D 在 EF 上，满足 AC＝BC，∠ADE＝∠BDF。

求证：A、B、C、D 四点共圆。

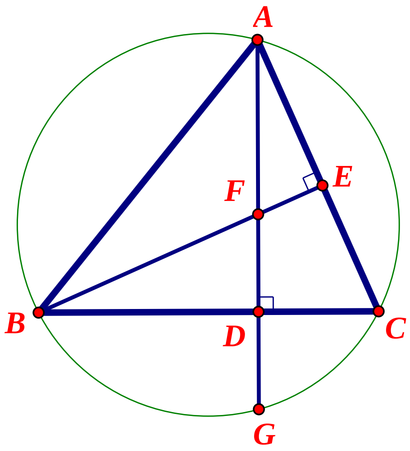


7. 已知在△ABC 中，AB≠AC，∠A 的平分线和 BC 的中垂线相交于点 P。

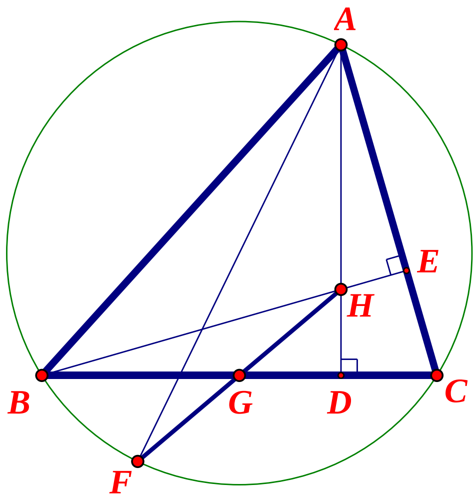
求证：（1）点 P 在△ABC 的外接圆上；（2）设△ABC 的内心和∠A 所含的旁切圆圆心分别为 I 和 I_1，则 PB＝PC＝PI＝PI_1。



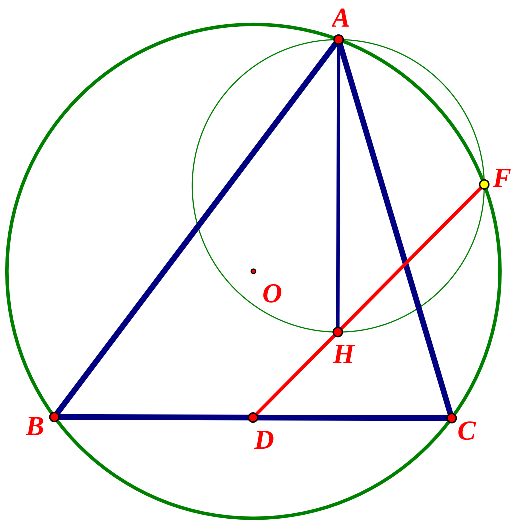
8. △ABC 的两条高线 BE、AD 交于 F，延长 AD 交△ABC 的外接圆于 G。
求证：FD＝DG。



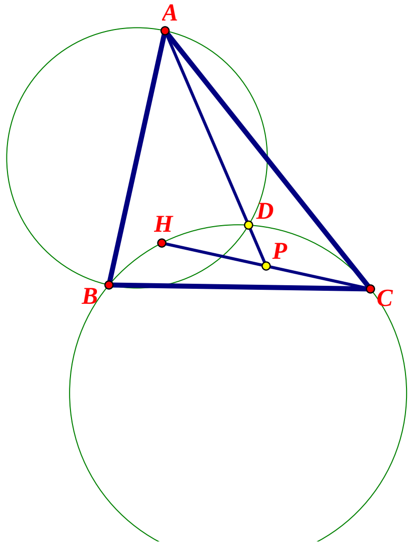
9. △ABC 的高 AD、BE 交于 H，外接圆的直径是 AF，若 HF 交 BC 于 G。
求证：HG＝GF。



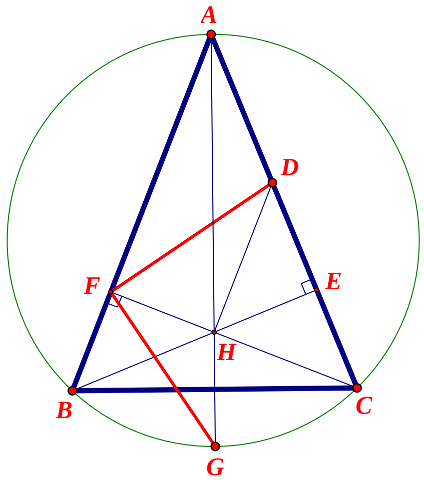
10. 已知△ABC 中，AB≠AC，H 是△ABC 的垂心，以 AH 为直径的圆与△ABC 的外接圆的另一交点为 F。求证：直线 FH 平分 BC。



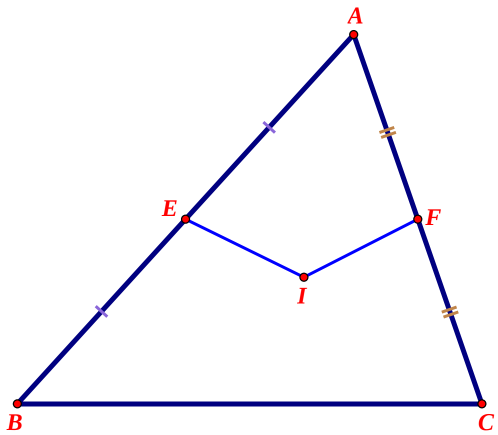
11. 已知：H 是△ABC 的垂心，以 AB 为直径的圆与过 H、B、C 三点的圆交于 B、D 两点，联结 AD 延长交 CH 于 P。求证：P 是 HC 的中点。（2011 年全国初中竞赛）



12. 已知：△ABC 中，AB＝AC，BE、CF 是的高，H 是垂心，过 H 作 AB 的平行线交 AC 于 D，AH 延长交外接圆于 G 点。求证：DF⊥FG。

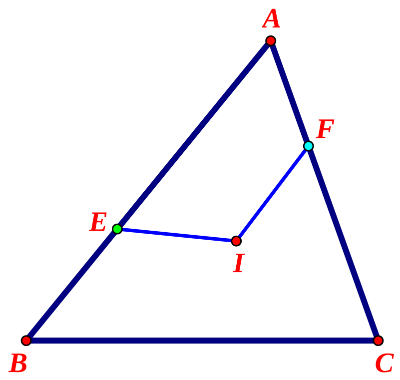


13. 已知△ABC 三边成等差数列，其中 BC 中等差中项，I 是△ABC 的内心，E、F 分别是 AB、AC 中点。求证：IE＝IF。



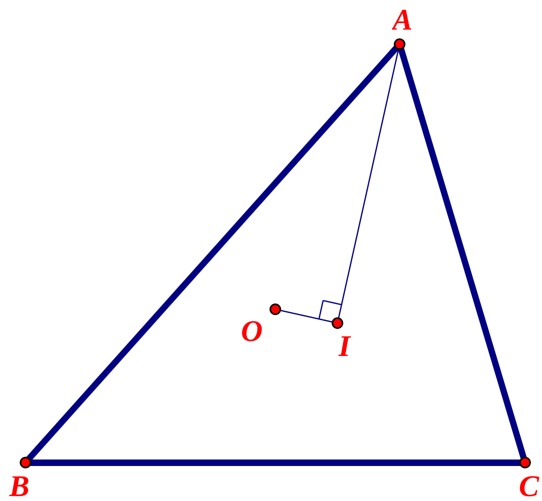
14. 已知 I 是△ABC 的内心，E、F 分别在 AB、AC 上。

求证：IE＝IF 的充要条件是 AE＝AF 或 AE＋AF＝AB＋AC－BC。

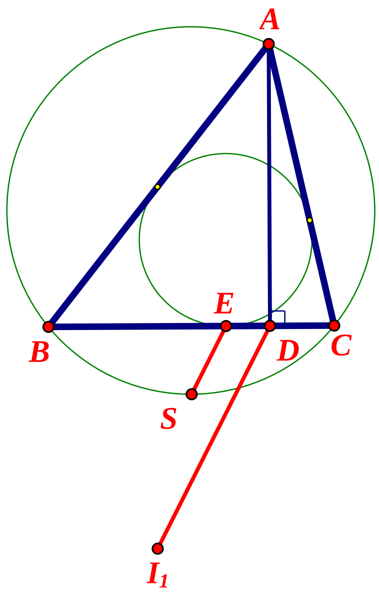


15. 已知：△ABC 满足 AB＋AC＝2BC，O、I 分别是△ABC 的外心和内心。

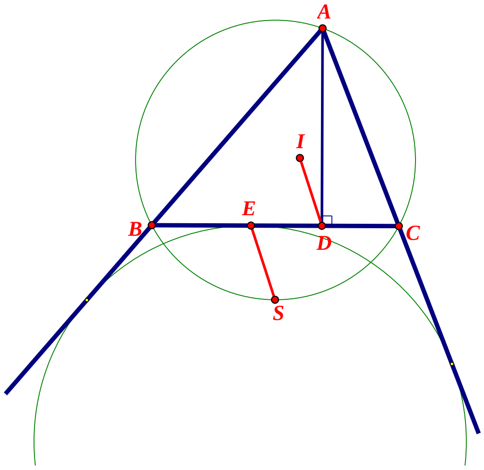
求证：OI⊥AI。



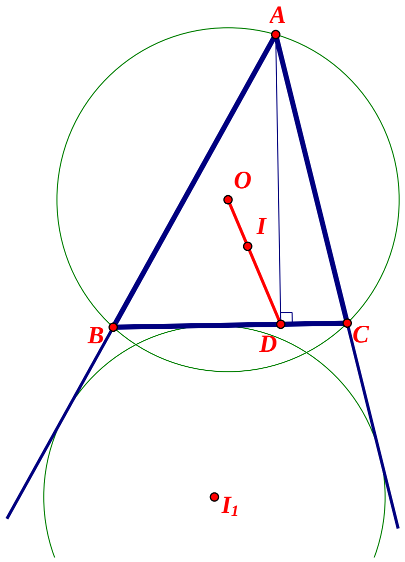
16. 已知 I_1 是△ABC 的 BC 边外的旁心，AD 是 BC 边上的高，E 是内切圆在 BC 上的切点，S 是外接圆弧 BC 中点。求证：I_1D∥ES。



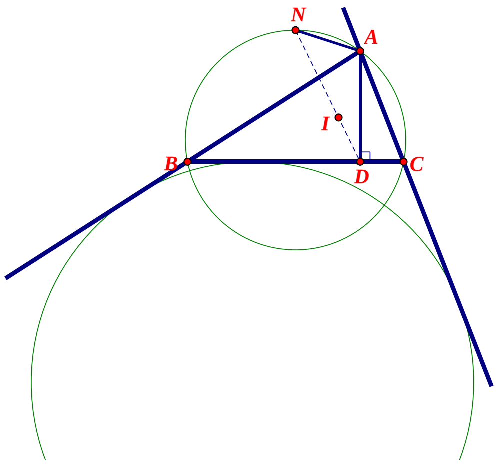
17. 已知 I 是△ABC 的内心，AD 是 BC 边上的高，E 是旁切圆在 BC 上的切点，S 是外接圆弧 BC 中点。求证：ID∥ES。



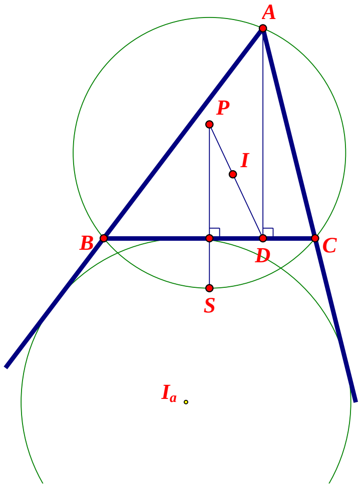
18. 已知 O、I 分别为△ABC 的外心和内心，AD 是 BC 边上的高，I 在线段 OD 上。求证：△ABC 外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径。（1998 年全国高中联赛）



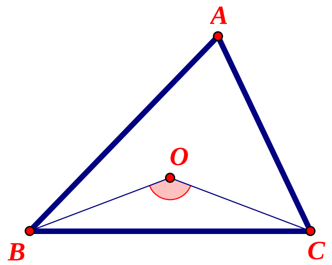
19. △ABC 中，AB＞AC，I 为内心，AD⊥BC 于点 D，∠BAC 的外角平分线与△ABC 的外接圆交于另一点 K。求证：K、I、D 共线的充要条件是∠A 所对的旁切圆半径等于△ABC 的外接圆半径的两倍。（2019 年根源杯赛题）



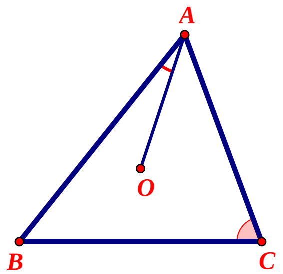
20. 如图，I 是△ABC（AB＞AC）的内心，AD 是 BC 边上的高，直线 DI 与 BC 中垂线交于 P，S 是弧 BC 中点。求证：PS 等于 BC 边对应的旁切圆半径。



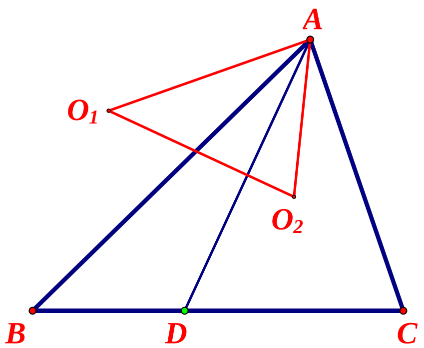
21. 设 O 是△ABC 的外心。
求证：∠BOC＝2∠A 或 360° －2∠A。



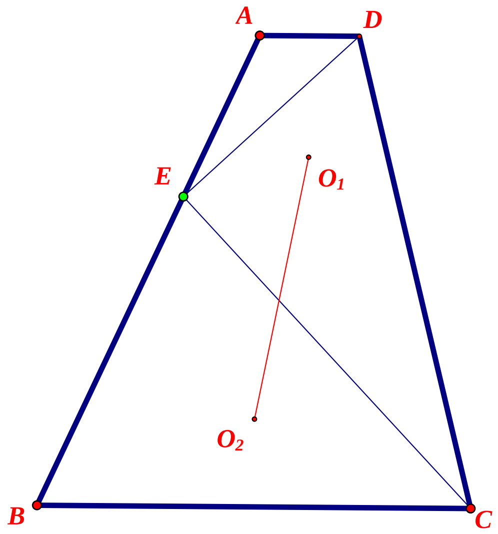
22. 设 O 是△ABC 的外心。
求证：∠OAB＝|90° －∠C|。



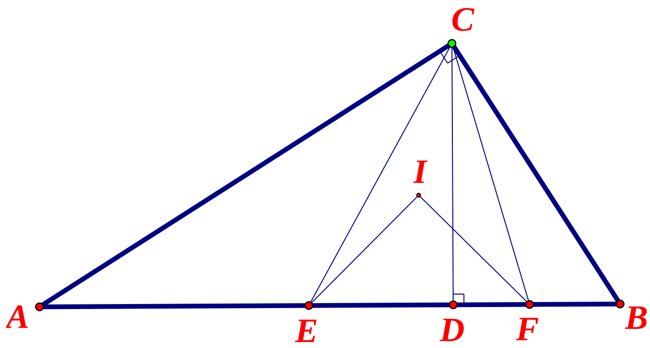
23. 已知 D 是△ABC 的 BC 边上任意一点，O_1、O_2 分别是△ABD、△ACD 的外心。
求证：$\triangle AO_1O_2 \backsim \triangle ABC$。



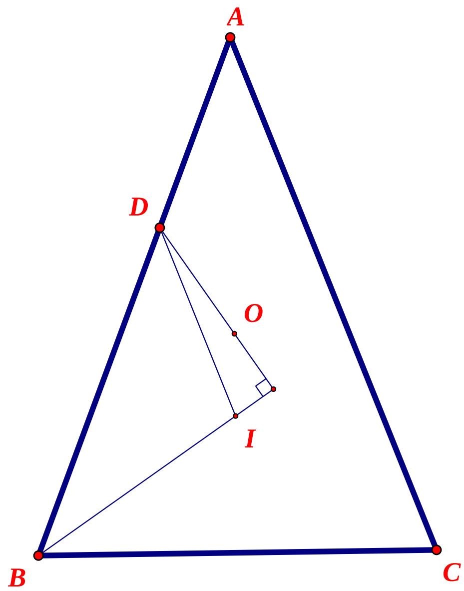
24. 已知 ABCD 是梯形（AD∥BC），E 是腰 AB 上的动点，O_1、O_2 分别是△ADE、△BCE 的外心。求证：O_1O_2 的长度不随 E 点的运动而变化。（2002 年第 2 届西部竞赛题）



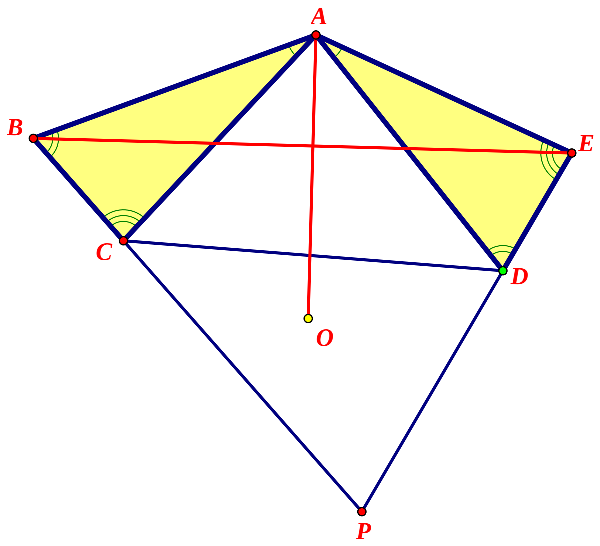
25. 已知△ABC 中，∠C＝90°，I 是△ABC 的内心，CD⊥AB 于 D，E、F 在 AB 边上，且 CE、CF 分别平分∠ACD、∠BCD。求证：IE⊥IF。



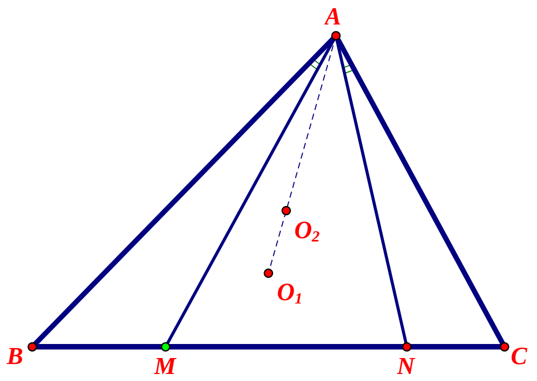
26. 已知△ABC 中，AB=AC，O、I 分别是△ABC 的外心和内心，点 D 在 AB 边上，且 OD⊥BI。求证：ID∥AC。



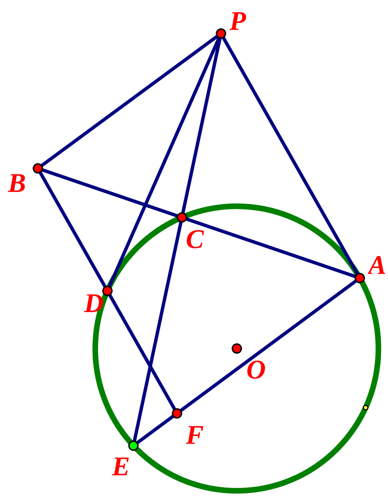
27．已知：$\triangle ABC \cong \triangle ADE$，延长底边 BC，ED 交于 P 点， O 是$\triangle PCD$ 的外心。求证：$AO \perp BE$。



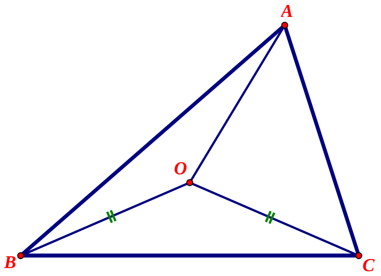
28．在锐角△ABC 中，AB＞AC，M、N 是 BC 边上两个不同的点，使得∠BAM＝∠CAN。设△ABC 和△AMN 的外心分别为 O_1、O_2。求证：O_1、O_2、A 三点共线。（2012 年全国联赛）



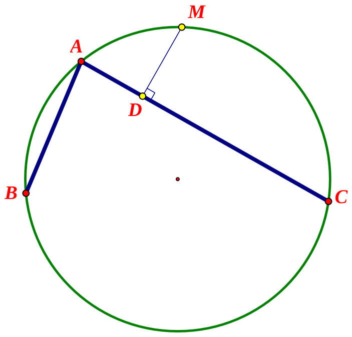
29．P 为圆外一点，PA、PD 为切线，PCE 为割线。过 D 作 PA 的平行线，分别与 AC 延长线及线段 AE 交于 B、F。求证：D 为 BF 中点。



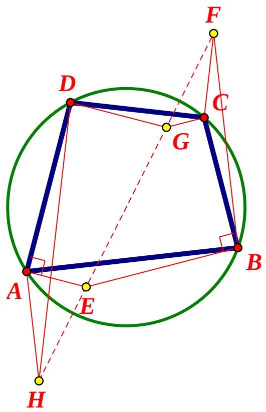
30. 已知：O 点在锐角△ABC 内，且 OB＝OC，且∠BOC＝2∠A。
求证：OA＝OB。



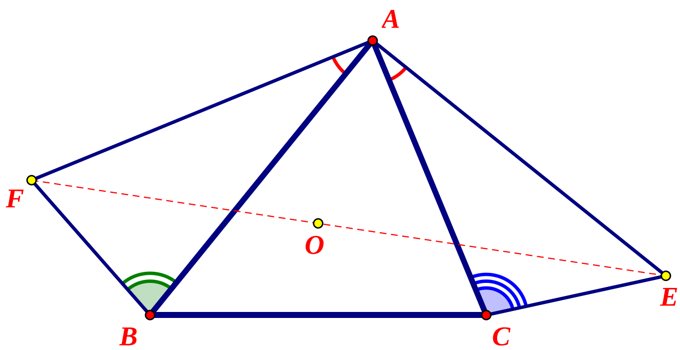
31. 如图，AB、AC 是⊙O 的弦，AC＞AB，M 是弧 BAC 的中点，MD⊥AC 于 D。
求证：BA＋AD＝DC。（阿基米德折弦定理）



32. 自圆内接四边形 ABCD 的每边端点作邻边的垂线，相邻垂线分别交于 E、F、G、H。求证：E、F、G、H 四点共线。

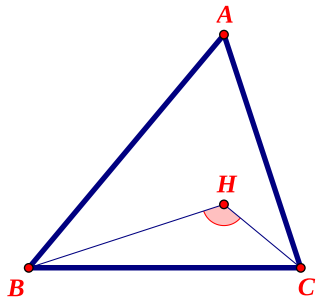


33. 在△ABC 两侧作△ABF、△ACE，使得∠BAF＝∠CAE＝90°－∠BAC，且∠ABF＋∠ACE＝180°，O 是△ABC 的外心。求证：E、O、F 三点共线。



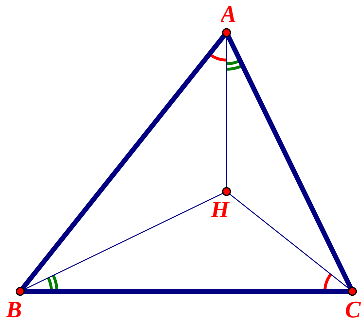
34. 设 H 是△ABC 的垂心。

求证：∠BHC＝180° －∠A 或∠A。



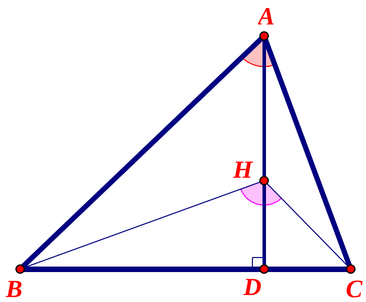
35. 已知：H 是△ABC 内一点，且∠HAB＝∠HCB，∠HAC＝∠HBC。

求证：H 是△ABC 的垂心。



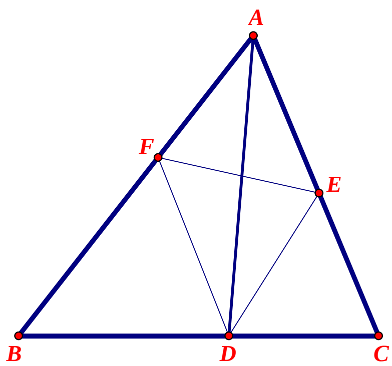
36. 锐角△ABC 中，AD 是高，H 是 AD 上一点，且∠BHC＝180° －∠A。

求证：H 是△ABC 的垂心。

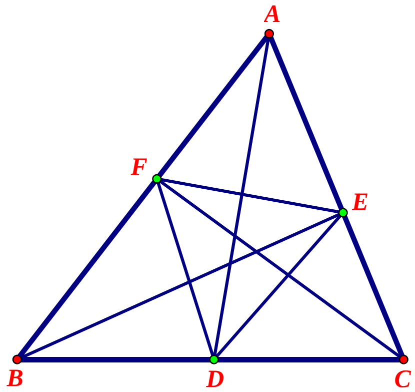


37. 已知点 D、E、F 分别在锐角△ABC 的边 BC、CA、AB 上，且 BCEF、CAFD、ABDE 都共圆。

求证：AD⊥BC。

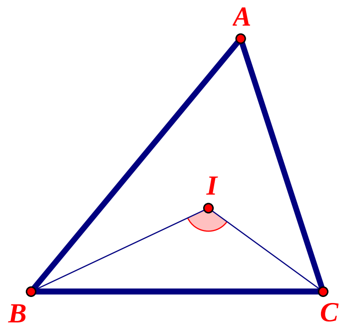


38. 已知锐角△ABC 的外接圆半径为 R，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上。求证：AD、BE、CF 是△ABC 的三条高的充要条件是 S＝$\frac{R}{2}$ (EF＋FD＋DE)，式中 S 是△ABC 的面积。（1986 年全国高中联赛）



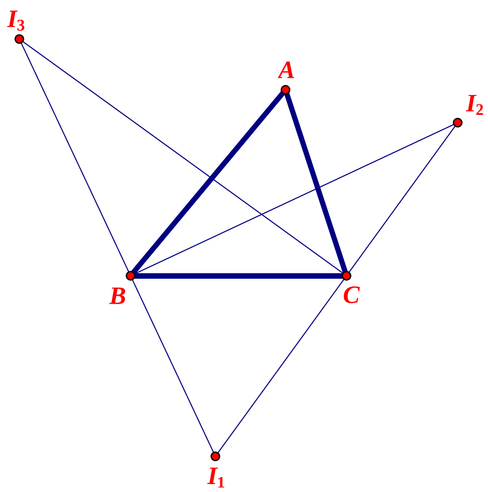
39. 设 I 是△ABC 的内心。

求证：∠BIC＝90°＋$\frac{1}{2}$∠A。



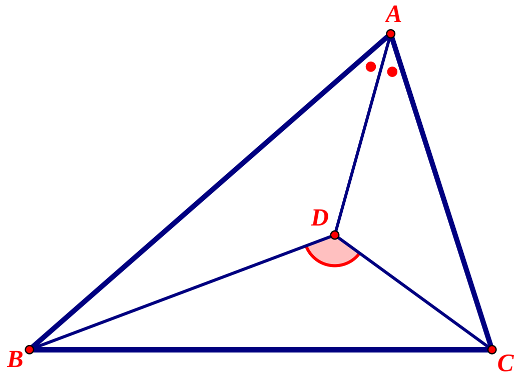
40. 设 I_1、I_2、I_3 分别是△ABC 对着 A、B、C 的旁心。

求证：∠BI_1C＝90°－$\frac{1}{2}$∠A；∠BI_2C＝∠BI_3C＝$\frac{1}{2}$∠A。



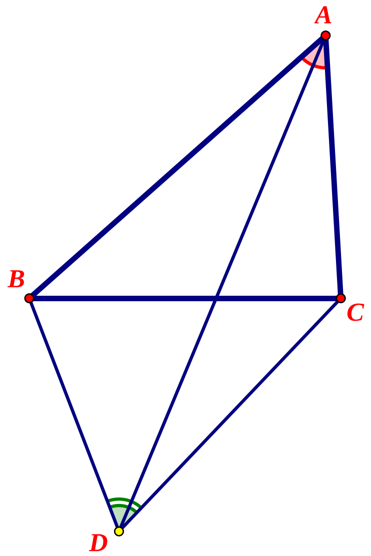
41. 已知：D 是△ABC 内一点，D 在∠A 的平分线上，且∠BDC＝90°$+\dfrac{\angle A}{2}$。

求证：BD 平分∠B。



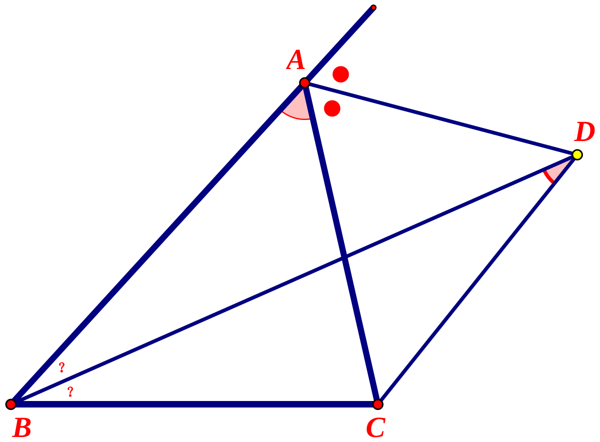
42. 已知：D 点位于∠A 的平分线上，且∠BDC＝90°$-\dfrac{\angle A}{2}$。

求证：∠ABC＋2∠DBC＝180°。

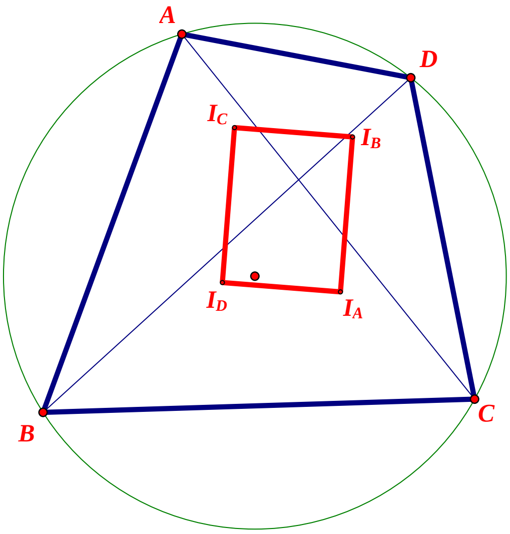


43. 如图，点 D 在△ABC 的∠ABC 的外角平分线上，且∠BDC＝$\dfrac{\angle A}{2}$。

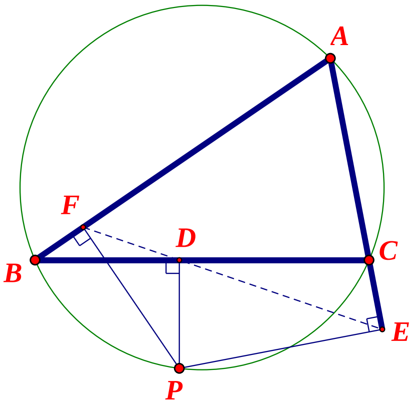
求证：BD 平分∠B。



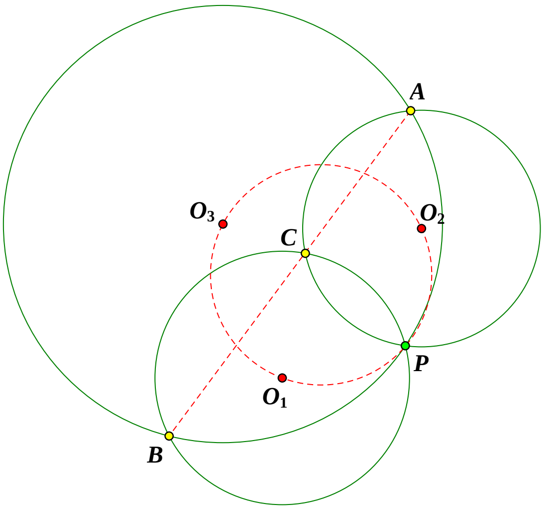
44. 已知 ABCD 是圆内接四边形，I_A、I_B、I_C、I_D 分别是△BCD、△ACD、△ABD、△ABC 的内心。求证：$I_AI_BI_CI_D$ 是矩形。（Fuhrmann 定理）



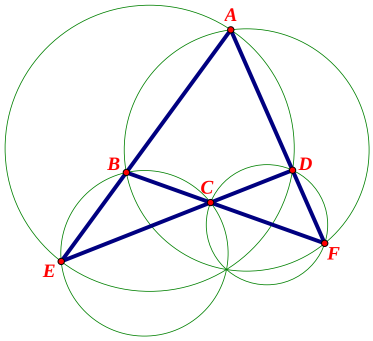
45. 自△ABC 外接圆上任一点 P，向三边作垂线 PD、PE、PF，垂足分别为 D、E、F。求证：D、E、F 三点共线。（西摩松线定理）



46. 平面上三圆⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3 有一公共点 P，且两两相交于 A、B、C 三点。求证：A、B、C 三点共线的充要条件是 P、⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3 四点共圆。（Salmon 定理）

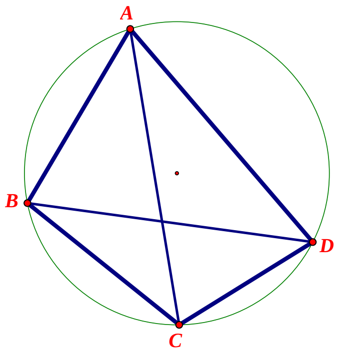


47. 四直线两两相交成四个三角形。求证：这四个三角形的外接圆通过同一点。（密克定理）



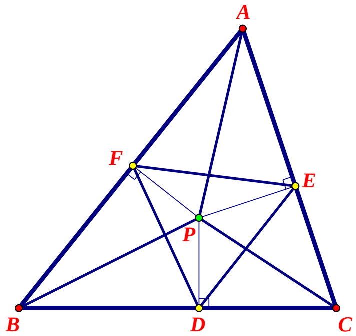
48. 设 ABCD 是圆内接四边形。

求证：AB•CD＋AD•BC＝AC•BD。（托勒密定理）



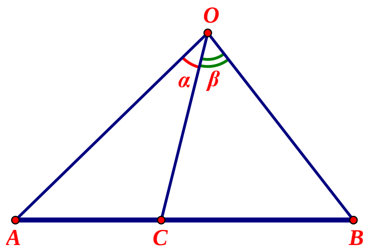
49. 自 P 点向△ABC 三边作垂线 PD、PE、PF，D、E、F 为垂足。

求证：EF∶FD∶DE＝（AP•BC）∶（BP•CA）∶（CP•AB)。（卡诺定理）

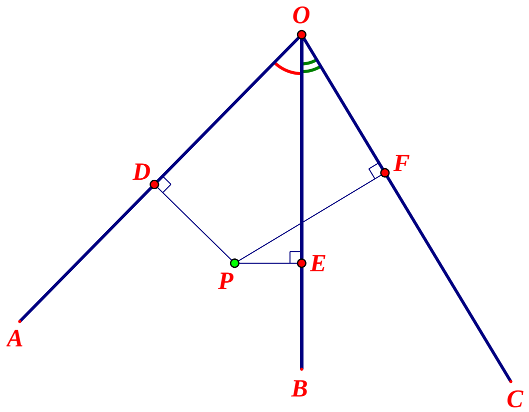


50. 已知 C 是线段 AB 上一点，O 是线段外一点，∠AOC＝α，∠BOC＝β。

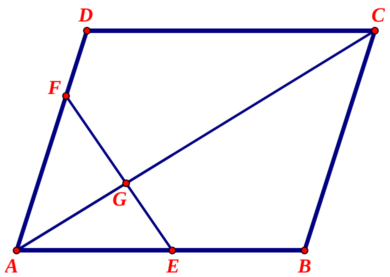
求证：$\dfrac{\sin\beta}{OA}+\dfrac{\sin\alpha}{OB}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{OC}$。



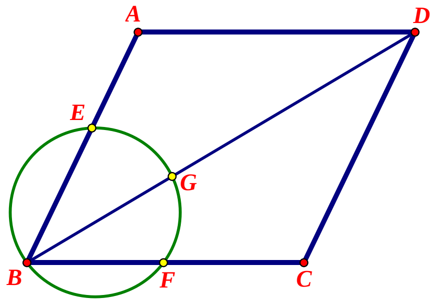
51. 如图，点 P 在射线 OA、OB、OC 上的射影分别为 D、E、F。
求证：ODsin∠BOC＋OFsin∠AOB＝OEsin∠AOC。



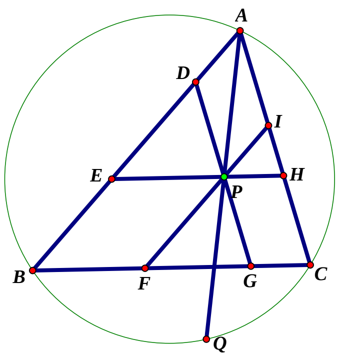
52. 平行四边形 ABCD 中，E、F 分别在 AB、AD 上，EF 交 AC 于 G。
求证：$\dfrac{AC}{AG}=\dfrac{AB}{AE}+\dfrac{AD}{AF}$。



53.已知：一圆过平行四边形 ABCD 的顶点 B，与 AB、BC、BD 分别交于 E、F、G。
求证：BA・BE＋BC・BF＝BD・BG。

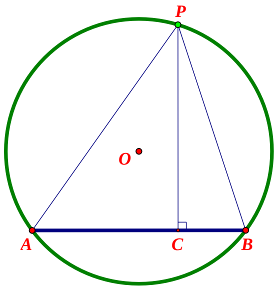


54. 已知：P 是△ABC 内任一点，EH∥BC，FI∥AB，GD∥AC，且三线共点于 P，AP 交△ABC 的外接圆于另一点 Q。求证：EP・PH＋FP・PI＋GP・PD＝AP・PQ。



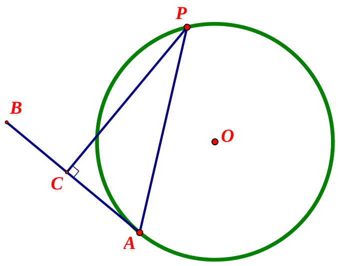
55. 若 AB 是⊙O 的弦，P 是圆上任意一点，PC⊥AB 于 C。

求证：PC＝$\dfrac{PA \cdot PB}{2R}$，其中 R 是外接圆半径。

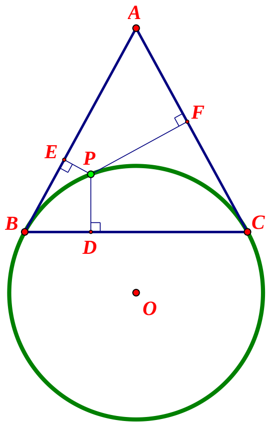


56. 若 AB 是⊙O 的切线，P 是圆上任意一点，PC⊥AB 于 C，

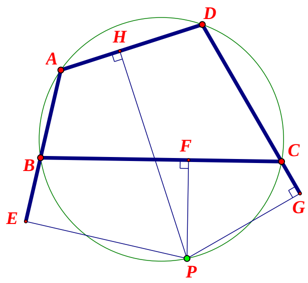
求证：PC＝$\dfrac{PA^2}{2R}$，其中 R 是外接圆半径。



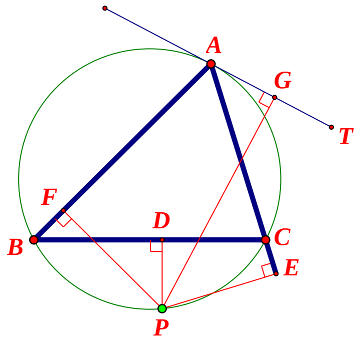
57. 从⊙O 外一点 A，引⊙O 的切线 AB 与 AC，B、C 为切点。在弧 BC 上任取一点 P，作 PD⊥BC 于 D，作 PE⊥AB 于 E，作 PF⊥AF 于 F。求证：PD^2＝PE • PF。



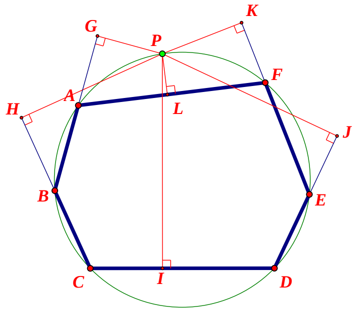
58. 已知 P 是圆内接四边形 ABCD 外接圆上任一点，自 P 作四边的垂线 PE、PF、PG、PH。求证：PE • PG＝PF • PH。



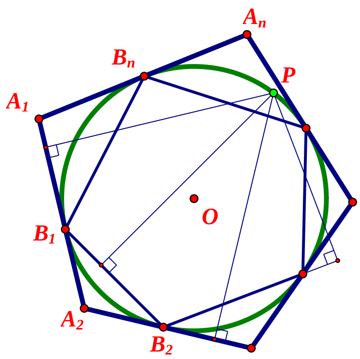
59. 已知：P 是△ABC 外接圆上任意一点，过 A 作外接圆的切线 AT，PD⊥BC，PE⊥AC，PF⊥AB，PG⊥AT。求证：PD • PG＝PE • PF。



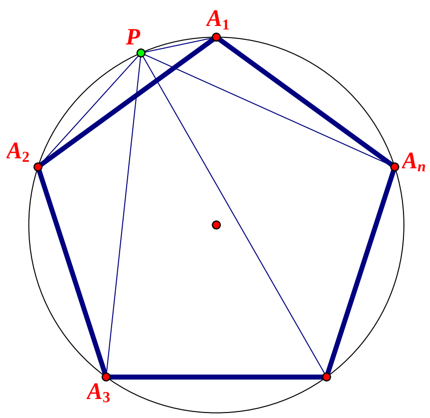
60. 已知：P 是六边形 ABCDEF 外接圆上任意一点。
求证：P 到 AB、CD、EF 三边的距离乘积等于 P 到 BC、DE、FA 三边的距离乘积。



61. 已知 $A_1A_2\cdots A_n$ 是⊙O 的外切 n 边形，$B_1B_2\cdots B_n$ 是以各切点为顶点的内接 n 边形。则⊙O 上任意一点 P 到 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边的距离乘积等于 P 到 $B_1B_2\cdots B_n$ 各边的距离乘积。

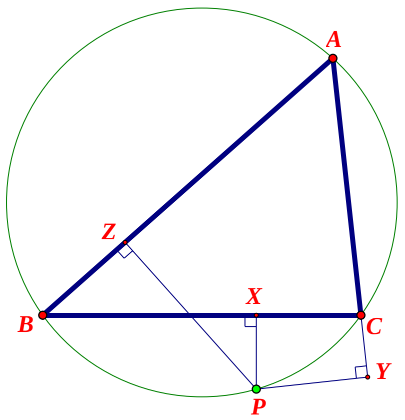


62. 求证：正 n 边形外接圆上任意点 P 到 n 个顶点距离的平方和为定值。

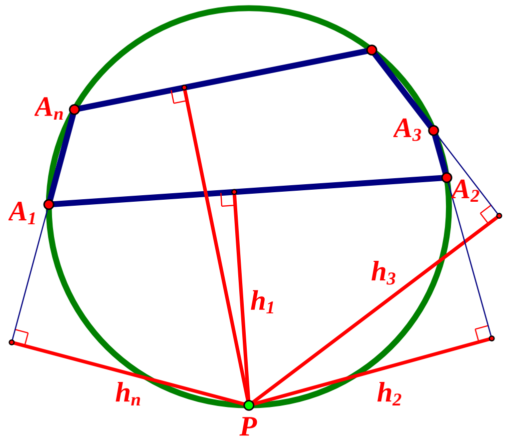


63. 已知 P 是△ABC 外接圆弧 BC 上任意一点。

求证：$\dfrac{BC}{PX}=\dfrac{AC}{PY}+\dfrac{AB}{PZ}$。



64. 已知 P 是圆内接 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 外接圆弧 A_1A_2 上任意一点，记 P 到弦 A_kA_{k+1} 的距离为 h_k（其中 A_{n+1} 即 A_1）。求证：$\dfrac{A_1A_2}{h_1}=\dfrac{A_2A_3}{h_2}+\dfrac{A_3A_4}{h_3}+\cdots+\dfrac{A_nA_1}{h_n}$。



65． 已知 O 是△ABC 的外心，D、E、F 分别是各边中点，R、r 为外接圆和内切圆半径。求证：OD＋OE＋OF＝R＋r。