

构造问题举例

2022 年元月

组合 (杂题)的数学问题:

- (1) 存在性问题: 研究“符合要求的整体”存在与否?
- (2) 构造与构造方法:

问题: 已知正整数数列各项之和为 23, 其中任一项或相邻若干项之和都不等于 3. 问:

- (1) 该数列是否有可能恰有 11 项?
- (2) 该数列是否有可能恰有 12 项?

试题举例

1. 设集合 $A=\{1, 2, m\}$, 其中 m 为实数. 令 $B=\{a^2|a \in A\}$, $C=A \cup B$. 若 C 的所有元素之和为 6, 则 C 的所有元素之积为_____.

2. 已知集合 A 由 n 个互不相同的正整数构成, 这些数的和等于 n^2 . 集合 B 也由 n 个互不相同的正整数构成, 这些数的和也等于 n^2 .

证明: 存在一个既属于集合 A 又属于 B 的数.

3. 黑板上写着 n 个整数, 其中任何两个数都至少相差 10. 已知三个最大的数的平方和小于 3×10^6 , 三个最小的数的平方和也小于 3×10^6 . 求满足要求的 n 的最大值.

4. 求证：对于给定的正整数 $n(n \geq 4)$, 存在一个各项及公差均不为零的等差数列 b_1, b_2, \dots, b_n , 其中任意三项(按原来的顺序)都不能组成等比数列.

5. 已知数列 $\{a_n\}(n \in \mathbb{N}^*)$ 的首项 $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n . 设 λ 为常数, 若对一切正整数 n 均有

$$\sqrt[3]{S_{n+1}} - \sqrt[3]{S_n} = \lambda \sqrt[3]{a_{n+1}} \text{ 成立, 则称此数列为 “}\lambda\text{—3” 数列.}$$

对于给定的 λ , 是否存在三个不同的数列 $\{a_n\}$ 为 “ $\lambda\text{—3” 数列, 且 }a_n \geq 0$?

若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

6. 设 a 为正整数. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=a$, $a_{n+1}=(a_n)^2+20$, $n=1, 2, \dots$.

(1) 证明: 存在一个非立方数 a , 使得数列 $\{a_n\}$ 中有一项为立方数;

(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 中至多有一项为立方数.

7. 设单位圆 $\odot S$ 内分布着 60 个点. 证明:

(1) 在圆上存在一个点, 其到这 60 个点的距离之和不超过 85;

(2) 在圆上存在一个点, 其到这 60 个点的距离和不超过 80.

8. 能否将所有的正整数分别染为红色或蓝色, 使得任何两个同色的数之和都不是 2 的方幂数?

9. 已知集合 $A=\{1, 2, \dots, 19\}$. 是否存在集合 A 的非空子集 S_1, S_2 , 满足

- (1) $S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = A$;
- (2) S_1, S_2 都至少有 4 个元素;
- (3) S_1 的所有元素的和等于 S_2 的所有元素的乘积.

9-1. 已知集合 $A=\{1, 2, \dots, 19\}$. 是否存在集合 A 的非空子集 S_1, S_2 , 满足

- (1) $S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = A$;
- (2) S_1, S_2 都至少有 4 个元素;
- (3) S_1 的所有元素的和等于 S_2 的所有元素的乘积.

若存在, 试求出所有满足条件的子集对 S_1, S_2 . 若不存在, 请说明理由.

9-2. 已知集合 $A=\{1, 2, \dots, 19\}$. 是否存在集合 A 的非空子集 S_1, S_2 , 满足

- (1) $S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = A$;
- (2) S_1, S_2 都至少有 3 个元素;
- (3) S_1 的所有元素的和等于 S_2 的所有元素的乘积.

若存在, 试求出所有满足条件的子集对 S_1, S_2 . 若不存在, 请说明理由.