

# 构造问题举例

2022 年元月

组合 (杂题) 的数学问题:

- (1) 存在性问题: 研究“符合要求的整体”存在与否?
- (2) 构造与构造方法:

问题: 已知正整数数列各项之和为 23, 其中任一项或相邻若干项之和都不等于 3. 问:

- (1) 该数列是否有可能恰有 11 项?
- (2) 该数列是否有可能恰有 12 项?

试题举例

1. 设集合  $A = \{1, 2, m\}$ , 其中  $m$  为实数. 令  $B = \{a^2 | a \in A\}$ ,  $C = A \cup B$ . 若  $C$  的所有元素之和为 6, 则  $C$  的所有元素之积为\_\_\_\_\_.

2. 已知集合  $A$  由  $n$  个互不相同的正整数构成, 这些数的和等于  $n^2$ . 集合  $B$  也由  $n$  个互不相同的正整数构成, 这些数的和也等于  $n^2$ .

证明: 存在一个既属于集合  $A$  又属于  $B$  的数.

3. 黑板上写着  $n$  个整数, 其中任何两个数都至少相差 10. 已知三个最大的数的平方和小于  $3 \times 10^6$ , 三个最小的数的平方和也小于  $3 \times 10^6$ . 求满足要求的  $n$  的最大值.

4. 求证：对于给定的正整数  $n(n \geq 4)$ ，存在一个各项及公差均不为零的等差数列  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，其中任意三项(按原来的顺序)都不能组成等比数列。

5. 已知数列  $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$  的首项  $a_1=1$ ，前  $n$  项和为  $S_n$ 。设  $\lambda$  为常数，若对一切正整数  $n$  均有

$$\sqrt[3]{S_{n+1}} - \sqrt[3]{S_n} = \lambda \sqrt[3]{a_{n+1}} \text{ 成立，则称此数列为 “}\lambda-3\text{” 数列。}$$

对于给定的  $\lambda$ ，是否存在三个不同的数列  $\{a_n\}$  为 “ $\lambda-3$ ” 数列，且  $a_n \geq 0$ ？

若存在，求  $\lambda$  的取值范围；若不存在，说明理由。

6. 设  $a$  为正整数。数列  $\{a_n\}$  满足： $a_1=a$ ， $a_{n+1}=(a_n)^2+20$ ， $n=1, 2, \dots$ 。

(1) 证明：存在一个非立方数  $a$ ，使得数列  $\{a_n\}$  中有一项为立方数；

(2) 证明：数列  $\{a_n\}$  中至多有一项为立方数。

7. 设单位圆  $\odot S$  内分布着 60 个点。证明：

(1) 在圆上存在一个点，其到这 60 个点的距离之和不超过 85；

(2) 在圆上存在一个点，其到这 60 个点的距离和不超过 80。

8. 能否将所有的正整数分别染为红色或蓝色, 使得任何两个同色的数之和都不是 2 的方幂数?

9. 已知集合  $A=\{1, 2, \dots, 19\}$ . 是否存在集合  $A$  的非空子集  $S_1, S_2$ , 满足

- (1)  $S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = A$ ;
- (2)  $S_1, S_2$  都至少有 4 个元素;
- (3)  $S_1$  的所有元素的和等于  $S_2$  的所有元素的乘积.

9-1. 已知集合  $A=\{1, 2, \dots, 19\}$ . 是否存在集合  $A$  的非空子集  $S_1, S_2$ , 满足

- (1)  $S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = A$ ;
- (2)  $S_1, S_2$  都至少有 4 个元素;
- (3)  $S_1$  的所有元素的和等于  $S_2$  的所有元素的乘积.

若存在, 试求出所有满足条件的子集对  $S_1, S_2$ . 若不存在, 请说明理由.

9-2. 已知集合  $A=\{1, 2, \dots, 19\}$ . 是否存在集合  $A$  的非空子集  $S_1, S_2$ , 满足

- (1)  $S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = A$ ;
- (2)  $S_1, S_2$  都至少有 3 个元素;
- (3)  $S_1$  的所有元素的和等于  $S_2$  的所有元素的乘积.

若存在, 试求出所有满足条件的子集对  $S_1, S_2$ . 若不存在, 请说明理由.