

例说计数原理

——问题、方法、概念

问题：7颗颜色分别为赤橙黄绿青蓝紫的彩珠，围成一圈用丝线串做手链。可串成_____种不同样子的手链。

组合(杂题)的数学问题：

- (1) 存在性问题：研究“符合要求的整体”存在与否？
- (2) 构造问题：
- (3) 计数问题：求所有“对象”的个数，无遗漏，不重复。
- (4) 最值与优化问题：——多快好省！

计数原理和计数公式：

(1) 分类原理：设 A 为完成一件事情的所有方法的集合，它可以划分为 n 个互不相交的非空子集 A_1, A_2, \dots, A_n , $|A_i|=m_i$, (其中 $i=1, 2, \dots, n$)，那么完成这件事情的总方法数为：

$$N=|A|=m_1+m_2+\cdots+m_n;$$

(2) 分步原理：设 A 为完成一件事情的所有方法的集合，且完成这件事情需要几个步骤，实现第 i ($i=1, 2, \dots, n$) 个步骤的方法的集合为 A_i , $|A_i|=m_i$ ，那么完成这件事情的总方法数为：

$$N=|A|=m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n;$$

(3) 容斥原理：用 $|A|$ 表示集合 A 的元素个数，则有： (1) $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$ ；
(2) $|A \cup B \cup C|=|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|B \cap C|-|C \cap A|+|A \cap B \cap C|$ 。

(4) 对应原理：用 $|X|$ 表示集合 X 的元素个数，若集合 A 中的元素与集合 B 中的元素一一对应，则有 $|A|=|B|$ 。

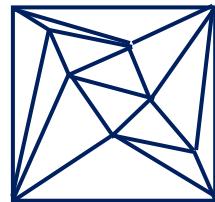
(5) 富比尼原理：(算两次)

试题举例

1. 在由 n^2 个小方格组成的正方形中，有多少个由整数个小方格组成的大小或位置不同的正方形？

2. 形如 45132 这样的数称为“波浪数”，即十位数字，千位数字均比与它们各自相邻的数字大，则由 1, 2, 3, 4, 5 可构成数字不重复的五位“波浪数”个数为 _____.

3. 一张正方形纸片内有 1010 个点，这些点及正方形的顶点中任意 3 点不共线，然后在这些点及正方形顶点之间连一些线段，将正方形全部分成小三角形(以所连线段及正方形的边为边，且所连线段除端点外，两两无公共点)，问一共连有多少条线段？一共得到多少个三角形？



4. 将一个边长为 n 的正方形，分成 $n \times n$ 个单位正方形，相当于画成一个围棋棋盘。棋盘中有许多矩形(这里把正方形也看做为矩形)。

(1) 求短边长为 k 的矩形的个数；

(2) 求证： $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5. 将 6 个数 2, 0, 1, 9, 20, 19 按任意次序排成一行，拼成一个 8 位数(首位不为 0)，则产生的不同的 8 位数的个数为 _____.

6. 一颗质地均匀的正方体骰子，六个面上分别标有点数 1, 2, 3, 4, 5, 6.

随机地抛掷骰子三次(各次抛掷结果互相独立)，所得的点数依次为 a_1, a_2, a_3 .

则事件“ $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_1|=6$ ”发生的概率为 _____.

7. 设有理数 $r=\frac{p}{q} \in (0, 1)$, 其中 p, q 为互素的正整数, 且 $pq|3600$. 则这样的有理数 r 的个数为 _____.

8. 设 a_1, a_2, \dots, a_{10} 是 1, 2, ..., 10 的一个随机排列, 则在 $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_9a_{10}$ 这 9 个数中既出现 9 又出现 12 的概率为 _____.

9. 有 12 张形状材质一样的纸片, 用 4 个不同的印章, 在每张纸片上恰好盖一个章. 可能会有多少种不同的印章卡片组合?

10. 设整数 a, b, c 为三角形三边, $a+b=n \in \mathbb{N}$, $1 \leq c \leq n-1$, 求这样的整边三角形个数.