函数、多项式专题讲义

1. 设非零数 $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ 是 10 次首一多项式 $P(x)$ 的 10 个复根，$Q(x)$ 是一个 45 次的首一多项式，其根为 $\dfrac{1}{r_i}+\dfrac{1}{r_j}-\dfrac{1}{r_ir_j}$，其中 $1 \leqslant i < j \leqslant 10$. 如果 $P(0)=Q(1)=2$，求 $|P(1)|$.

2. 设 n 为正整数. 证明:

(1) $\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{2\pi}{2n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$;

(2) $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}$.

3. 假设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 n 个不同的数，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是任意 n 个数. 令

$$F(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i),\quad L(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iF(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

证明: $L(a_i)=b_i, i=1,2,\cdots,n$. 通常称 $L(x)$ 为**拉格朗日插值公式**

利用上述公式求

(1) 一个次数 <4 的多项式 $f(x)$ 使得

$$f(2)=3,\ f(3)=-1,\ f(4)=0,\ f(5)=2;$$

(2) 一个二次多项式 $f(x)$，它在 $x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值.

4. 若非零复数 z 满足 $z+\frac{1}{z}=1$，求 $z^{2022}+\frac{1}{z^{2022}}$ 的值.

5. 求大于 2022 的最小的正整数 n 使得 $g(x)=x^4+x^2+1$ 整除 $f(x)=(x^6+x^4)^n-x^{4n}-x^6$.

6. 设 $f(x)$ 是一个 2022 次整系数多项式且满足 $f(x^2)=f(x)f(x-1)$. 求 $f(1)$.

7. 求满足 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\sqrt{2}$ 成立的次数最低的有理系数多项式 $f(x)$.

8. 设 $p=a_0\cdot 10^n+a_1\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_n$ 是素数，其中 $0\le a_i\le 9,\ 0\le i\le n,\ a_0a_n\ne 0$. 令 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$. 证明: 不存在非常数整系数多项式 $g(x), h(x)$ 使得 $f(x)=g(x)h(x)$.

9. 设 $S=\{1,2,3,4,5\}$, 求满足 $f(f(x))=x$ 的映射 $f:S\longrightarrow S$的个数.

10. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 是单射，且对任意的 $x>0$, 有 $xf(x)>1$, $f(xf(x)-1)=2$, 求 $f(2)$.

11. 已知实数 a,b 满足 $a+\lg a=10,\ \ b+10^b=10$, 求 $\lg(a+b)$.

12. 设 $f_0(x)=x$, 令 $f_{n+1}(x)=f_n(x^2(3-2x)),n\geq 0$. 当 $a\in[0,1]$, 求

$$\sum_{n=0}^{2022} f_n(a)+\sum_{n=0}^{2022} f_n(1-a)$$

的最小值.

13. 设 $x\in\mathbb{R}$ 满足 $x^{x^{x^x}}=((x^x)^x)^x$, 求 $(x^x)^{x^x}$.

14. 设正实数 a,b,c 满足

$$\log_{30}(a+b+c)=\log_8(3a)=\log_{27}(3b)=\log_{125}(3c).$$

求 $a+3b+9c$ 的值.

15. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，对任意实数 x 有 $f(x+3)f(x-4)=-1$. 又当 $0\leq x<7$ 时，$f(x)=\log_2(9-x)$, 求 $f(-100)$ 的值.

16. 若 a,b,c 为关于 x 的方程 x^3-x^2-x+m 的三个实根，求 m 的最小值.

17. 已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$, 求 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$ 的最大值与最小值的乘积.

18. 已知实数 $x,y,z\in\mathbb{R},x+y+z=1,x^2+y^2+z^2=1$. 求 xyz 的最大值和最小值.

定义 1. 设 $q_1,q_2,\cdots,q_m$ 是实数序列. 如果 $q_jq_{j+1}<0$, 则说 q_j 与 q_{j+1} 之间有一个**变号**; 如果 $q_{j+1}=\cdots=q_{j+s-1}=0$, 但 $q_jq_{j+s}<0$, 则说 $q_j,q_{j+1},\cdots,q_{j+s}$ 之间有一个变号. 序列 $q_1,q_2,\cdots,q_m$ 中的变号总数称为该序列的**变号数**.

引理 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in\mathbb{R}[x]$, 且 $a_0>0$, $a_n\neq 0$. 如果 $f(x)$ 有 p 个正根 (重根按重数计算), 则 p 是偶数当且仅当 $a_n>0$; p 是奇数当且仅当 $a_n<0$.

定理 1. (**笛卡尔符号律**) 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是实系数多项式, 其中 $a_0>0,a_n\neq 0$. 如果 $f(x)$ 有 p 个正根 (重根按重数计算), 而序列 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$ 的变号数为 μ, 则 (1) $p\leqslant\mu$; (2) $\mu-p$ 是偶数.

19. 求下列方程的实根的个数:

(1) $x^4-x^3-1=0$;

(2) $x^6+x^4-x^3-2x-1=0$;

(3) $x^4-x^2+x-2=0$.

20. 设$f(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$, 证明: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n})=f(nx)$.

21. 给定两个正整数 $a \neq b$, $f(a,b)$ 表示恰好整除 a 与 b 之一的最小的正整数, 例如 $f(2^3\times 3^2, 2^2\times 3^3\times 11)=2^3$. 令 $S=\{(x,y) \mid 1\leqslant x\neq y\leqslant 100, (f(x,y),(x,y))=2\}$. 求 $|S|$.

22. 设 $a\in\mathbb{R}$, $\{a\}$ 表示 a 的小数部分. 令

$$
\begin{aligned}
&S=\{1,2,,3,\ldots,2022\}\,,\\
&V=\{f:S\longrightarrow[0,1)\mid \text{任意 } x,y\in S,\ \text{存在 } z\in S,\ \text{使得 } \{f(x)+f(y)\}=f(z)\}\,,\\
&T=\left\{(m,n)\in S\times S \ \middle|\ \text{存在 } f\in V,\ \text{使得 } f(1)=\frac{m}{n}\right\}.
\end{aligned}
$$

求 $\sum\limits_{(m,n)\in T}\dfrac{m}{n}$.