代数

一，均值不等式

1.1.设$a,b,c>0,$ 求证：$\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c}\geq 2.$

1.2.设$a>b>0,$ 求$\sqrt{2}a^3+\dfrac{3}{ab-b^2}$的最小值.

1.3.设x,y,z是正数,且$x+y+z=1,$ 求证：$\sqrt{\dfrac{xy}{z+xy}}+\sqrt{\dfrac{yz}{x+yz}}+\sqrt{\dfrac{zx}{y+zx}}\leq\dfrac{3}{2}.$

1.4.设$a,b,c>0$且$a+b+c=3,$ 证明：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca.$

1.5.设$x,y,z>0,$ 且$xyz=1.$ 证明：$\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\dfrac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\dfrac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\dfrac{3}{4}.$

1.6.设$x,y,z>0,$ 证明：$(1+\dfrac{x}{y})(1+\dfrac{y}{z})(1+\dfrac{z}{x})\geq 2+\dfrac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$

1.7.设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正数,证明：$\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}\leq\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}\leq\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}\leq\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{n}}$,当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时取等.

1.8.已知$a,b,c>0,$ 证明：$\dfrac{a}{b}+\sqrt{\dfrac{b}{c}}+\sqrt[3]{\dfrac{c}{a}}\geq 2^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{2}}.$

1.9 设x，y，$z\in\mathbf{R}^+$， $x+2y+3z=1$，求$\dfrac{16}{x^3}+\dfrac{81}{8y^3}+\dfrac{1}{27z^3}$的最小值.

二．柯西不等式

2.1.已知 $x, y, z>0$, 且 $xyz=1$.求证：

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y} \geq 4(x+y+z)-12+\frac{9}{x+y+z}.$$

2.2.设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$.证明：$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{n}{2}$.

2.3.若 $x, y, z \geq 1$, 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$, 证明：$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$.

2.4.设正实数 a, b, c 满足 $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$.证明：

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1} \geq \frac{1}{a+b+c}.$$

2.5.已知 $x, y, z>0$, 证明：$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2} \geq 1$.

2.6.设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数,证明：$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{n}$.

2.7.已知 $a, b, c>0$, 且 $a^2+b^2+c^2=3$. 证明：$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}} \geq 3$.

三．代数综合

3.1． 设非负实数 x_1，x_2，…，$x_n(n\geqslant 3)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=2019$，求 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}+x_1+x_n$ 的最大值．

3.2 设 $n\geqslant 3$ 为整数，t_1，t_2，…，t_n 为正实数，满足 $n^2+1>\left(t_1+t_2+\cdots+t_n\right)\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}+\cdots+\dfrac{1}{t_n}\right)$．
证明：对满足 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$ 的所有整数 i、j、k，t_i、t_j、t_k 总能构成三角形的三边长．

3.3 已知 a_1，a_2，…，$a_n\left(n\geqslant 2\right)$ 都是大于 1 的实数，且 $\left|a_{k+1}-a_k\right|<1$，$k=1$，2，…，$n-1$．
求证：$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_1}<2n-1$．

3. 4 设 $x_i\in\left[0,1\right],i=1,2,\cdots,2000$，定义 $F_i=\dfrac{x_i^{2000}}{\sum\limits_{j=1}^{2000}x_j^{3999}-x_j^{3999}+2000}$．求 $\sum\limits_{i=1}^{2000}F_i$ 的最大值.

3.5 已知 n 是给定的大于1的正整数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为实数，定义

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}+\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

求 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 的最小值.

3.6设 a_k 为正整数 k 的最大奇因数，记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_i$.证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{S_iS_{i+1}}<\dfrac{3}{20}$．

3.7.设 $n\in N,n\geq 2$，且非负实数 $x_1,x_2,...,x_n$ 满足 $x_1+x_2+...+x_n=1$

求 $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j(x_i+x_j)$ 的最值并说明何时取到最值。

3.8． 已知正项数列 $\{a_n\}$ 对任意 $k\in\{1,2,3,\cdots,2015\}$ 满足 $a_{k+1}^3+a_k^3\leq a_{k+1}^2-a_k^2$．

证明：存在 a_i、a_j（$1\leq i<j\leq 2016$），使得 $0<|a_i-a_j|\leq\dfrac{1}{2015}$．

3.9．设 a、b、c 是正实数，求证：$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1$．

3.10：设 $a,b,c\geq 0$ 且 a,b,c 不全为零，求 $f\left(a,b,c\right)=\sum\sqrt{\dfrac{a^3}{a^3+\left(b+c\right)^3}}$ 的最值

3.11：求最小的实数 M，使得对一切实数 a,b,c 都成立不等式

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right|\leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

3.12．若不等式 $a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant M\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)$ 对所有非负实数 a、b、c 成立，求实数 M 的最大值．

3.13：.设 x，y，$z\geqslant 0$，且 $x+y+z=1$．求 $xy+yz+zx-3xyz$ 的最小值与最大值．

3.14：已知正实数 x、y、z 满足：$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=3$．
求 $u=xyz\left(x+y+z\right)$ 的最大值．

3.15：若二次函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a,b,c>0\right)$ 有零点，求 $\min\left\{\frac{b+c}{a},\frac{c+a}{b},\frac{a+b}{c}\right\}$ 的最大值.

3.16．求最大的常数 k，使得对于 $\left[0,1\right]$ 中的一切实数 a、b、c、d，都有不等式
$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant k\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$.

3.17. 已知 x，y，$z\geqslant0$ 且 $x+y+z=1$，求函数
$f(x,y,z)=(xy+yz+zx)(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1})$ 的最大值和最小值.

3.18．设 a，b，$c\in\mathbf{R}^+$，记 $M=\sqrt[4]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[4]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[4]{\frac{c}{b+a}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{a+c}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}$，求 M 的最小值.

3.19．设 n 是一个固定的整数，$n\geqslant2$.（1）确定最小常数 c，使得不等式
$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right)\leqslant c\left(\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\right)^4$ 对所有的非负实数 x_1，x_2，…，x_n 都成立.
（2）对于这个常数 c，确定等号成立的充要条件.

3.20．设 $x_i\geq0$（i=1，2，…，n），且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{1\leq k<j\leq n}\sqrt{\frac{k}{j}}x_kx_j=1$，求 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 的最大值与最小值.

3.21 设 $2n$ 个实数 a_1，a_2，…，a_{2n} 满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{2n-1}\left(a_{i+1}-a_i\right)^2=1$，求
$\left(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}\right)-\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)$ 的最大值.

3.22 设 x_1，x_2，…，x_n 与 a_1，a_2，…，$a_n\left(n>2\right)$ 是满足条件：

（1）$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$；

（2）$\left|x_1\right|+\left|x_2\right|+\cdots+\left|x_n\right|=1$；

（3）$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 的两组任意实数．为了使不等式 $\left|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right|\leqslant A\left(a_1-a_n\right)$ 成立，求数 A 的最小值.

3.23、设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，求证：$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n}<\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$

3.24．求最大的常数 k，使得对于 $\left[0,1\right]$ 中的一切实数 a、b、c、d，都有不等式

$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant k\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$.

3.25，求最小的正整数 k，使得对于满足 $0\leqslant a\leqslant1$ 的所有 a 和所有正整数 n，都有不等式；

$a^k\left(1-a\right)^n<\frac{1}{\left(n+1\right)^3}$.

3.26 求最小的实数 λ，使得不等式 $5(abc+abd+acd+bcd)\leqslant \lambda abcd+12$

对满足 $a+b+c+d=4$ 的任意正实数 a、b、c、d 都成立.

3.27．设 n 为正整数，实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$．求证：

（1）$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|\right)^2\leqslant\frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2$；

（2）等号成立的充要条件是 x_1，$\cdots$，x_n 成等差数列.

3.28．给定正整数 n．求最大的实数 T_n，使得对任意 $2n$ 个定义在 $[0,1]$ 上的实值函数 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,2n)$，都存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$ $(0\le x_i\le 1, i=1,2,\cdots,2n)$，满足

$$\left|\prod_{i=1}^{2n}f_i(x_i)-\sum_{i=1}^{2n}x_i\right|\ge T_n.$$

3.29、给定整数 $n>2$，设正实数 $a_1,\cdots,a_n$ 满足 $a_k\le 1$，$k=1,2,\cdots,n$，记 $A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$，$k=1,2,\cdots,n$.证明：$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|<\frac{n-1}{2}$.

3.30、设 $a_1,a_2,...,a_n$ 均为正实数，$n\in N^*$，证明：$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_1+a_2+...+a_k}\le 4\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$