初等数论讲义 (纪春岗，南京师范大学，202201，常州)

二、同余理论

1. 设 a 为正整数, 则 $a^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$. 特别, 当 a 为奇数时, $a^2 \equiv 1 \pmod 8$.

2. 设 n 为正整数, 则 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] = [\sqrt{n}+\sqrt{n+2}]$.

3.(QLS, 2011) 设正整数 $n \geq 4$, 证明: 存在多项式 $f(x)$ 满足条件: (1) $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, a_i 均为正整数; (2) 对每个整数 m 以及任意 k 个整数 r_i, $1 \leq i \leq k$, $k \geq 2$, 均有 $f(m) \neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)$.

4. 设 a, b, c 为正整数, 那么在三个整数 a^2bc+2, b^2ca+2, c^2ab+2 中, 必存在一个数不是完全平方数.

5. (Fermat 小定理) 设 p 为素数, $a \in \mathbb{Z}$ 且 $(a, p) = 1$, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

6. 若素数 $p \equiv 3 \pmod 4$, 则对任意的整数 a, 均有 $p \nmid a^2+1$.

7. $a^2 \equiv 0, \pm 1 \pmod 5$.

8. 证明: 对任意的正整数 n, 均有 $5 \nmid \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 8^k$.

9. (Wilson Theorem) 设 p 为素数, 则 $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

10. 设 p 为奇素数, 则
$$(\frac{p-1}{2}!)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p.$$

11. 求所有的正整数 n 满足条件: $2n+7 \mid n!-1$.

12. 设 k 为正整数且 $2k+1$, $3k+1$ 均为平方数, 证明: $40 \mid k$.

13. 设 a, b 均为正整数, 如果对任意的正整数 n 均有 $a^n + n \mid b^n + n$, 那么 $a = b$.

14. $a^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 9$.

15.(QLS, 2021) 设 a 为正整数, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n^2 + 20$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. (1) 证明: 存在一个非立方数的正整数 a, 使得数列 $\{a_n\}$ 中有一项为立方数; (2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 中至多有一项为立方数.

16. 求方程 $y^2 = x^3 + 23$ 的整数解 (x, y).

17. 证明: 对任意的整数 a, b, $\frac{2a^2-1}{b^2+2}$ 均不是整数.

18. 求所有的整数对 (x, y), 使得 $y^2 - 5 \mid x^2 + 1$.

19.(QLS, 2020) 设数列 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$. 证明: 对每个正整数 $n \geq 5$, a_n 均有一个素因子 $p \equiv 1 \pmod 4$.

20. 设 p 为素数, 正整数 $n \geq p^2$, 如果 $n \mid p^n - p$, 那么 $\frac{p^n-p}{n}$ 为合数.
注记. $p = 2$ 时为 2021 年全国联赛加试题.

21. 若正整数 $n > 1$, 则 $n \nmid 2^n - 1$.

22. 设 p 为奇素数, 证明: 存在无穷多正整数 n, 使得 $p^2 \mid 1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n$.

23. 求所有的正整数对 (m,n) 使得 $mn-1 \mid n^3+1$.

24. 证明: 存在无穷多正整数 n, 使得 $n^2 \mid 3^n + 2^n$.