

2020 年北京大学强基计划试题选讲

1. 已知 x, y, z, w 均为正实数, 且满足 $x \geq y \geq w$ 和 $x + y \leq 2(z + w)$, 则 $\frac{w}{x} + \frac{z}{y}$ 的最小值等于 ()
- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{7}{8}$ C. 1 D. 前三个答案都不对
2. 在 $(2019 \times 2020)^{2021}$ 的全体正因数中选出若干个, 使得其中任意两个的乘积都不是平方数, 则最多可选因数的个数为 () .
- A. 16 B. 31 C. 32 D. 前三个答案都不对
3. 已知整数列 $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) 满足 $a_1 = 1, a_2 = 4$, 且对任意 $n \geq 2$ 有 $a_n^2 - a_{n+1}a_{n-1} = 2^{n-1}$, 则 a_{2020} 的个位数字是 () .
- A. 8 B. 4 C. 2 D. 前三个答案都不对
4. 设 a, b, c, d 是方程 $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ 的 4 个复根, 则 $\frac{a-1}{a+2} + \frac{b-1}{b+2} + \frac{c-1}{c+2} + \frac{d-1}{d+2}$ 的值为 () .
- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 前三个答案都不对
5. 设 x, y, z 均不为 $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, 其中 k 为整数, 已知 $\sin(y + z - x), \sin(x + z - y), \sin(x + y - z)$ 成等差数列, 则依然成等差数列的是 () .
- A. $\sin x, \sin y, \sin z$ B. $\cos x, \cos y, \cos z$
 C. $\tan x, \tan y, \tan z$ D. 前三个答案都不对
6. 从圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的点向椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 引切线, 两个切点间的线段称为切点弦, 则椭圆 C 内不与任何切点弦相交的区域面积为 () .
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. 前三个答案都不对
7. 使得 $5x + 12\sqrt{xy} \leq a(x + y)$ 对所有正实数 x, y 都成立的实数 a 的最小值为 () .
- A. 8 B. 9 C. 10 D. 前三个答案都不对
8. 设数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 9$, 且对任意 $n \geq 1$ 有 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n - 20$, 其前 n 项和为 S_n , 则 S_n 的最大值等于 () .
- A. 28 B. 35 C. 47 D. 前三个答案都不对

9. 设直线 $y=3x+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 交于 A , B 两点, O 坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 ().

A. 8 B. 10 C. 12 D. 前三个答案都不对

10. 正整数 $n \geq 3$ 称为理想的, 若存在正整数 $1 \leq k \leq n-1$ 使得 C_n^{k-1} , C_n^k , C_n^{k+1} 构成等差数列, 其中 $C_n^k \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数, 则不超过 2020 的理想数个数为 ().

A. 40 B. 41 C. 42 D. 前三个答案都不对

11. 函数 $f(\theta)=\sqrt{3+2\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta}+\sqrt{5-2\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta+4\sin\theta}$ 的最大值为 ().

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ D. 前三个答案都不对

12. 方程 $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$ 的实根个数为 ().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 前三个答案都不对

13. 设 P , q 均为不超过 100 的正整数, 则有有理根的多项式 $f(x)=x^5+px+q$ 的个数为 ().

A. 99 B. 133 C. 150 D. 前三个答案都不对

14. 满足对任意 $n \geq 1$ 有 $a_{n+1}=2^n-3a_n$, 且严格递增的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 的个数为 ().

A. 0 B. 1 C. 无穷个 D. 前三个答案都不对

15. 设函数 $f(x,y,z)=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$, 其中 x , y , z 均为正实数, 则有 ().

A. f 既有最大值也有最小值 B. f 有最大值但无最小值
 C. f 有最小值但无最大值 D. 前三个答案都不对