江苏省数学夏令营不等式讲义 王朝和

2022/7/15

1.设$a,b,c>0$,求证：$\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}\geq 2$.

2.设$a>b>0$,求$\sqrt{2}a^3+\frac{3}{ab-b^2}$的最小值.

3.设x,y,z是正数,且$x+y+z=1$,求证：$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}}+\sqrt{\frac{yz}{x+yz}}+\sqrt{\frac{zx}{y+zx}}\leq\frac{3}{2}$.

4.设$a,b,c>0$且$a+b+c=3$,证明：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$.

5.设$x,y,z>0$,且$xyz=1$.证明：$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$.

6.设$x,y,z>0$,证明：$(1+\frac{x}{y})(1+\frac{y}{z})(1+\frac{z}{x})\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$.

7.设正实数x,y,z满足$xyz=1$,证明：

$$\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1}\leq 1.$$

8.设$x,y,z>0$,且$x+y+z=1$,证明：$\frac{x^4}{y(1-y^2)}+\frac{y^4}{z(1-z^2)}+\frac{z^4}{x(1-x^2)}\geq\frac{1}{8}$.

9.已知$x,y,z>0$,且$xyz=1$.求证：

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\geq 4(x+y+z)-12+\frac{9}{x+y+z}.$$

10.设$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$满足$a_1a_2\cdots a_n=1$.证明：

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{n}{2}.$$

11.若$x,y,z\geq 1$,且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$,证明：$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$.

12.已知$x,y,z>0$,证明：$\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}+\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}\geq 1$.

13.正实数a,b,c及非负实数x,y满足条件 $a^6+b^6+c^6=3$，$(x+1)^2+y^2\leq 2$，求$I=\frac{1}{2a^3x+b^3y^2}+\frac{1}{2b^3x+c^3y^2}+\frac{1}{2c^3x+a^3y^2}$的最小值.

14.正实数a,b,c满足：$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$，求证：$ab+bc+ca\leq\frac{3}{2}$.

15.设$a,b,c\in\mathrm{R}^+$，$abc=1$．证明：$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$.

16.已知$a_i\in\mathrm{R}^+$，$i=1,2,\cdots,n(n\geq 2)$，$n\in\mathrm{N}^*$，且$a_1+a_2+\cdots+a_n=s$，求证：

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-a_n}\geq\frac{n}{n-1}.$$

17.设a,b,c,d为正实数．求证：$\dfrac{a}{b+2c+3d}+\dfrac{b}{c+2d+3a}+\dfrac{c}{d+2a+3b}$
$+\dfrac{d}{a+2b+3c}\geq\dfrac{2}{3}$．

18.设正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$．求证：
$(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)\cdot\left(\dfrac{a_1}{a_2^2+a_2}+\dfrac{a_2}{a_3^2+a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_1^2+a_1}\right)\geq\dfrac{n}{n+1}$．

19.正实数x,y,z满足$x^2+y^2+z^2=1$．求$\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2}$的最小值．

20.设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是任意实数．证明：
$\dfrac{x_1}{1+x_1^2}+\dfrac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\dfrac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{n}$.

21.（1）设3个正实数a,b,c满足$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2>2\left(a^4+b^4+c^4\right)$， 求证：$a,b,c$一定是某个三角形的3条边长．

（2）设n个正实数a_1,a_2，$\cdots,a_n$满足 $\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2>(n-1)\left(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4\right)$，求证：这些数中任何3个一定是某个三角形的3条边长．

22.设$a,b,c<0$，求证：$\dfrac{a}{b+3c}+\dfrac{b}{8c+4a}+\dfrac{9c}{3a+2b}\geq\dfrac{47}{48}$． 当且仅当$a:b:c=10:21:1$时等号成立．

23.设$2n$个实数$a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$满足条件$\sum\limits_{i=1}^{2n-1}\left(a_{i+1}-a_i\right)^2=1$，求
$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$的最大值．

24.设非负实数a_1,a_2，$\cdots$，a_n与b_1，b_2，$\cdots$，b_n同时满足以下条件：
（1）$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)=1$；
（2）$\sum\limits_{i=1}^{n}i(a_i-b_i)=0$；
（3）$\sum\limits_{i=1}^{n}i^2(a_i+b_i)=10$.
求证：对任意$1\leq k\leq n$，都有 $\max\{a_k,b_k\}\leq\dfrac{10}{10+k^2}$.

25.实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，求证：$\max\limits_{1\leq k\leq n}\left(a_k^2\right)\leq\dfrac{n}{3}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(a_i-a_{i+1}\right)^2$.

26.设$x_i\geq0(i=1,2,\cdots,n)$且$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{1\leq k<j\leq n}\sqrt{\dfrac{k}{j}}x_kx_j=1$，求$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$的最大值与最小值．

27.给定正整数$n\geq2$，设正整数$a_i(i=1,2,\cdots,n)$满足$a_1<a_2<\cdots<a_n$以及$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\leq1$，求证：对任意实数$x$，有 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leq\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$.

28.设a,b,c为正实数，且$a+b+c\geq abc$． 证明： $a^2+b^2+c^2\geq abc$.

29.4个实数a,b,c,d满足：（1）$a\geq b\geq c\geq d$；（2）$a+b+c+d=9$；（3）$a^2+b^2+c^2+d^2=21$．求证：$ab-cd\geq 2$．

30.设两组实数a_1，a_2，$\cdots$，a_n；b_1，b_2，$\cdots$，b_n满足条件：

$a_1\leq b_1$，

$a_1+a_2\leq b_1+b_2$，

$\cdots\cdots$

$a_1+a_2+\cdots+a_n\leq b_1+b_2+\cdots+b_n$，

$0\leq a_{i+1}\leq a_i$，$i=1,2,\cdots,n-1$，

求证：$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\leq b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$．

31.设$x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq 0$，且满足$x_1+x_2+\cdots+x_n\leq 400$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geq 10^4$，求证：$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geq 10$．

32.设a,b,c是某个三角形的三条边长，求证：

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$．

33.设a,b,c是正实数，且满足$abc=1$，证明：

$\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)\leq 1$．

34.实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$均属于区间$[-1,1]$，证明：

$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+a_ia_{i+1}}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+a_i^2}$，其中$a_{n+1}=a_1$．

35.已知三角形的三边长分别为a,b,c，面积为S．证明：

$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$，并指出等号成立的条件．

36.设x_1,x_2,x_3是正数．求证：

$x_1x_2x_3\geq(x_2+x_3-x_1)(x_1+x_3-x_2)(x_1+x_2-x_3)$．

37.设$x,y,z\geq 0$，且$x+y+z=1$．求$xy+yz+zx-3xyz$的最小值与最大值．

38.已知$a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 2)$都是大于1的实数，且$|a_{k+1}-a_k|<1$，$k=1,2,\cdots,n-1$．求证：

$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_1}<2n-1$．

39.已知x,y,z都是非负实数，且$x+y+z=1$．求证：

$0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq\dfrac{7}{27}$．

40.设x_1,x_2，$\cdots$，x_n是正实数，求证：

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}+\cdots+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}$$
$$\geq\frac{x_1+\cdots+x_n}{3}.$$

41.三角形ABC的三边长a,b,c满足$a+b+c=1$．求证： $5\left(a^2+b^2+c^2\right)+18abc\geq\frac{7}{3}$.

42.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,且$a_{n+1}=\frac{1+2a_n}{1+a_n}(n\in\mathrm{N}_+)$.证明:$a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

43.设$0<a<1$,定义$a_1=1+a, a_n=\frac{1}{a_{n-1}}+a(n\geqslant 2)$.证明:对一切自然数$n$,均有$a_n>1$.

44.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.证明:$14<a_{100}<18$.

45.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2, a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$.证明:$1<a_n<\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$.

46.已知数列$\{a_n\}$满足$a_0=\frac{1}{2}, a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n^2}a_{n-1}^2$.证明:$\frac{n+1}{n+2}<a_n<n$.

47.数列$\{a_n\}$定义如下:$a_1=2, a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$.证明:$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2008}}<1$.

48.对于$n\in\mathrm{N}_+$,设$T_n=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}$.证明: $T_n\leqslant\frac{11}{10}$.

49.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^n-(-2)^n$.证明:$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{1}{2}$.

50.设$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}$.证明:当正整数$n\geqslant 2$时,$a_{n+1}<a_n$.