

数论选讲（2022 江苏省夏令营）

陈永高 南京师范大学

预备知识：

(1) 费马小定理有如下两种形式：

费马小定理：设 p 是素数， a 是整数，则 $p \mid a^p - a$.

费马小定理：设 p 是素数， a 是整数， p 不能整除 a ，则 $p \mid a^{p-1} - 1$.

(2) 定理：连续 n 个整数之积一定是 $n!$ 的倍数.

题目：

1. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为正整数， $30 \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，证明： $30 \mid a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5$.
2. 设 p 是素数， $a^p \equiv b^p \pmod{p}$. 证明： $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.
3. 设 a, b 是正整数， $b > 2$. 证明： $2^a + 1$ 不能被 $2^b - 1$ 整除.
4. 设 m, n 是正整数， $k_1, \dots, k_n$ 是非负整数， $2^m - 1 \mid 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$ ，证明：
 $m \leq n$.
5. 证明：对任何整数 $n \geq 2$ ，总存在 n 个互不相同的正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，使得
 $(a_i - a_j)^2 \mid a_i a_j$ ，对任何 $1 \leq i < j \leq n$ 成立.
6. 设 M 为正整数， $S = \{n : n \in \mathbb{Z}, M^2 \leq n < (M+1)^2\}$ ，证明形如
 ab ($a \in S, b \in S, a < b$) 的数两两不同.
7. 设 a, b, c 是正整数， $0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$ ，证明： $a^2 + b^2 - abc$ 为平方数.
8. 设 p 为素数， $p > 3$ ，证明： $43 \mid 7^p - 6^p - 1$.
9. 设 p 与 $p+2$ 均是素数， $p > 3$ ，数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 2$ ，

$$a_n = a_{n-1} + \left\lceil \frac{pa_{n-1}}{n} \right\rceil, \quad n = 2, 3, \dots,$$

这里 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小的整数. 证明：对 $n = 3, 4, \dots, p-1$ 均有 $n \mid pa_{n-1} + 1$ 成立