2022 夏令营代数讲义

1.设整数 $n\geq 2$. $a_1,a_2,...,a_n$ 为两两不同的实数.证明: $\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{a_k-a_j}=0$

2．对任意满足 $xyz+x+y+z=4$ 的实数 x,y,z，证明：$(yz+6)^2+(zx+6)^2$

$+(xy+6)^2\geq 8(xyz+5)$

3、已知数列$\{x_n\}$满足$x_1=2$，对于任意的正整数 n，均有$x_{n+1}=\sqrt{x_n+8}-\sqrt{x_n+3}$

（1）证明：数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限;

（2）对于每个正整数 n，证明：$n\le x_1+x_2+...+x_n\le n+1$

4、设整数$n \ge 2$，实数$x_1, x_2, \ldots x_n$满足$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.试求$\sum_{i=1}^{n} |x_i|$的最小值和最大值.

5.证明：存在唯一的函数 $f\left(x, y\right)$，这里 $x, y \in N^{*}$，使得对于任意 $x, y \in N^{*}$，均有

$$f\left(x, x\right)=x\text{；}$$

$$f\left(x, y\right)=f\left(y, x\right)$$

$$\left(x+y\right) f\left(x, y\right)=y f\left(x, x+y\right)$$

6、设 $n\in Z_{+}$．对于每个 i、$j\in\{1,2,.....,n\}$， a_{ij} 为正实数，且满足 $a_{ij}a_{ji}=1$．设 $c_i=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}(i=1,2,...,n)$ ．证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}\le 1$．

7、设 $a_1, a_2, \ldots\ldots$ 为整数列，d 为整数. 对一切正整数 n，数列 $\{a_n\}$ 满足：（1）$|a_n|$ 为素数；（2）$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + d$. 证明：$\{a_n\}$ 为常数列.

8.正整数数列 $c_1,c_2,\cdots$ 满足：对任意正整数 m,n，若 $1\le m\le\sum_{i=1}^{n}c_i$，则存在正整数 $a_1,a_2,\cdots a_n$，使得 $m=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}$。对每个正整数 i，求 c_i 的最大值。

9、设$a \le a_i \le A$，$b \le b_i \le B\left(i=1,2,\cdots,\ n\right)$，$a$，$b$均为正数，则

$$\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2\right)\le\left(a_1b_1+\cdots+a_nb_n\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right).$$

10.已知整数系数多项式 $f(x)=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$，若 $f\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=0$，$f(1)+f(3)=0$，求 $f(-1)$ 的值.

11、设n为正整数，实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$满足$x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$

（1）证明：$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|\right)^2\le\frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}\left(x_i-x_j\right)^2$

（2）证明：等号成立的充要条件是$x_1,x_2,\cdots,x_n$成等差数列。

12.设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是给定的不全为 0 的实数，且

$r_1\left(x_1-a_1\right)+r_2\left(x_2-a_2\right)+\cdots+r_n\left(x_n-a_n\right)\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$对一切

$x_1,x_2,\cdots,x_n\in R$成立，试求$r_1,r_2,\cdots,r_n$