函数与函数思想

函数试题中的“三基”——概念、运算、方法

一、关于函数思想和方法

1．记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c．

已知 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1) 若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B；

(2) 求 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值．(2022 新高考 1 卷 18 题)

2．已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(0<2a<b)$，对于任意 $x\in \mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立．

求$\dfrac{f(1)}{f(0)-f(-1)}$的最小值．

二、函数三要素——f：$A\to B$.

(1)定义域；

(2)“对应关系”f、复合关系 $f(g(x))$的合成与分解；

(3)**值域和最值**.

1．试求从集合 $A=\{1，2，\cdots，n\}$到集合 $B=\{1，2，\cdots，m\}$的映射的个数．

2．已知 f 是从集合 M 到集合{－3，－2，－1，0，1，2，3}的映射，其中 $M=\{a，b，c\}$，则满足 $f(a)+f(b)+f(c)=0$ 的映射 f 的个数是________．

3．已知 x 是正实数，函数 $y=x^2+x+\dfrac{3}{x}$的最小值是________．

4．求函数 $y=x^2+x\sqrt{x^2-1}$的值域．

分析：求导数求极值?

——$y'=2x+\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}=2x+2\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$?

5．已知实数 $a＞b＞0$，函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a-x^2}-\sqrt{b-x^2}}$ 的最大值是_______．

三、函数性质

(1)单调性；(2)奇偶性；(3)周期性．

1．已知函数 $f(x)$是严格单调函数，且 $x\in(0，\infty)$时，总有 $f(f(x)+\dfrac{2}{x})=1$．则 $f(1)$的值是_______．

2．设函数 $f(x)=\dfrac{(x+\sqrt{2021})^2+\sin 2021x}{x^2+2021}$的最大值为 M，最大值为 m．

则 $M+m$ 的值是_______．

3．已知 $f(x)$是定义在实数集 R 上的函数，且 $f(x+2)(1-f(x))=1+f(x)$．

若 $f(1)=2+\sqrt{3}$，则 $f(2021)+f(2023)$的值是_______．

4．已知函数 $f(x)$满足：对任意 $x\in\mathbf{R}$，且有 $f(x)+f(x-1)=x^2$，且 $f(19)=94$，则 $f(94)$的后三位数为_______．

四、数形结合

1．设函数 $f(x)=|2-\log_3 x|$．正实数 a，b，c 满足 $a<b<c$，且 $f(a)=2f(b)=2f(c)$．

求$\dfrac{ac}{b}$的值．(2021 高联 A_1)

2．在平面直角坐标系中，函数 $y=\frac{x+1}{|x|+1}$的图像上有三个不同的点位于直线 l 上，且这三点的横坐标之和为 0．求 l 的斜率的取值范围．(2021 高联 A)

3．已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同 最小值．

(1) 求 a；

(2) 证明：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$和 $y=g(x)$共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列 (2022 新高考 1 卷 22)

4．已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-2)x+1$．若存在 $m>0$，使得 $f(m)\leqslant 0$，则实数 a 的最大值是_______．(吉林 2021)

5．在平面直角坐标系中，函数 $y=\frac{1}{|x|}$的图像为 C．设 C 上的两点 P，Q 满足：P 在第一象限，Q 在第二象限，且直线 PQ 与 C 位于第二象限的部分相切于点 Q，求$|PQ|$的最小值．

五、多项式函数的零点表达式

1．已知首项系数为 1 的五次多项式 $f(x)$满足：$f(n)=8n$，$n=1$，2，3，4，5，则 $f(x)$的一次项系数为_________．(2020 年 B)

2．设 4 次整系数多项式 $f(x)$满足 $f(1+\sqrt[3]{3})=1+\sqrt[3]{3}$，$f(1+\sqrt{3})=7+\sqrt{3}$，则 $f(x)=$________.

3．若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+c$ 在区间$(-1，2)$上有三个零点，求 $f(-1)\cdot f(2)$的取值范围．

4．设 ab 为实数，函数 $f(x)= x^3+ax^2+bx$．若存在三个实数 x_1，x_2，x_3 满足 $x_1+1\leqslant x_2\leqslant x_3-1$，且 $f(x_1)= f(x_2)= f(x_3)$，求$|a|+2|b|$的最小值．(2021 年 A_2)

函数在高中数学中是一条重要的主线，贯穿了高中数学学习的三年.

在高中数学联赛中，函数考查的只是基础，就是考查基本概念、基本方法及基本运算.

当然也有特例：

(山东 2020)设 $0<a\neq1$.

求所有函数 f：$\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$，$\forall x$，$y\in\mathbf{R}_+$，$f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f(a)=1$.

六、课后练习

1．设 $f(x)=x^3+3(x^2+x+\sin\pi x)$，则 $f(1-\pi)+f(\pi-3)=$_______．(2020 年 C)

2．设函数 $f(x)=\cos x+\log_2 x(x>0)$，若正实数 a 满足 $f(a)=f(2a)$，则 $f(2a)-f(4a)$的值是_______．(2021 年 A)

3．定义域为 R 的函数 $f(x)$满足：当 $x\in[0，1)$时，$f(x)=2^x-x$，且对任意实数 x，均有 $f(x)+f(x+1)=1$．记 $a=\log_2 3$，则表达式 $f(a)+f(2a)+f(3a)$的值为_______．(2021 年 A_2)

4．设实数 $t\in[0，\pi]$，若关于 x 的方程 $\cos(x+t)=1-\cos x$ 有解，求 t 的取值范围．(重庆 2020)

5．已知 a，$b\in$R，函数 $f(x)=ax^3+bx^2+x+1(a<0)$恰有两个零点，则 $a+b$ 的取值范围是______．

6．求函数 $f(x)=x|x-a|+x$ 在[0，2]上的最大值 $g(a)$．

7．已知$(\sin\alpha，\sin\beta)$是函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^3+t^3}$和 $g(x)=3tx^2+(3t^2+1)x+t$ 图象的公共点，求证：$|t|\leqslant 1$．

8．(12 分)已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$．

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)设 a，b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$．