一、复数基础知识

1．复数的基本概念

（1）复数的四种表示形式

代数形式：$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$；

几何形式：复平面上的点 Z（a,b）或由原点出发的向量$\overrightarrow{OZ}$；

三角形式：$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),r\geqslant 0,\theta\in\mathbf{R}$；

指数形式：$z=re^{\mathrm{i}\theta}$．

（2）复数相等

①$\begin{cases}a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i},\\ a,b,c,d\in R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c,\\ b=d\end{cases}$（两点重合）；

②$\begin{cases}r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),\\ r_1,r_2\geqslant 0,\quad \theta_1,\theta_2\in R\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=r_2,\\ \theta_1-\theta_2=2k\pi(k\in Z)\end{cases}$．

2．复数的运算法则

加、减法：$(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i})=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i}$；

乘法：$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$；

$$r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)];$$

除法：$\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+b\mathrm{i}}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}(c+d\mathrm{i}\neq 0).$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

乘方：$[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)(n\in\mathbf{N})$；

开方：复数$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$的$n$ 次方根是$\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n})(k=0,1,\cdots,n-1).$

3．复数的模与共轭复数

（1）复数的模的性质

①$|z|\geqslant|\mathrm{Re}(z)|,|z|\geqslant\mathrm{Im}(z)|$；

②$|z_1\cdot z_2\cdots z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|$；

③$|\dfrac{z_1}{z_2}|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$；

④$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|$,与复数$z_1$， z_2对应的向量$\overrightarrow{OZ_1}$， $\overrightarrow{OZ_2}$反向时取等号；

⑤$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$，与复数$z_1,z_2,\cdots,z_n$对应的向量

$\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2},\cdots,\overrightarrow{OZ_n}$同时取等号．

（2）共轭复数的性质

①$z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$；　②$z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z), z-\overline{z}=2\operatorname{Im}(z)$；　③$\overline{\overline{z}}=z$；

④$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；　⑤$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_1}$；　⑥$\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$；

⑦z 是实数的充要条件是$\overline{z}=z$，z 是纯虚数的充要条件是$\overline{z}=-z(z\neq 0)$．

4．复数常用方法

（1）两个复数相等的充要条件是它们的实部、虚部对应相等，或者它们的模与辐角主值相等（辐角相差 2π 的整数倍）．利用复数相等的充要条件，可以把复数问题转化为实数问题，从而获得解决问题的一种途径．

（2）复数的模也是将复数问题实数化的有效方法之一．善于利用模的性质，是模运算中的一个突出方面．

二、典型例题解析

1.计算：（1）(1−2i)(3+4i)(−2+i)；　（2）$(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})^3$；（3）$(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2})^6+(\frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2})^6$.

2.已知 $f(z)=2z+\overline{z}-3\mathrm{i}$，$f(\overline{z}+\mathrm{i})=6-3\mathrm{i}$，求 $f(-z)$的值.

3.已知 $\frac{a^2+2ab+b^2+a^2b^2}{a+b+abi}=\frac{27-8\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$，求实数 a,b.

4.已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}, z_2=-2+\mathrm{i}, z_3=-1-2\mathrm{i}$，它们在复平面上的对应点分别为 A、B、C，且 A、B、C 是一个正方形的三个顶点，求这个正方形的第四个顶点 D 对应的复数 z.

5.设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in R)$，求在复平面上满足下列条件的点的集合所组成的图形分别是什么？

（1）$|z|\leqslant 2$且$|b|>1$；

（2）$|z-1+2i|=3$.

6.集合 $M=\{z\,||z-1|\leq 1, z\in C\}$，$N=\{z\,||z-1-\mathrm{i}|=|z-2|, z\in C\}$，$P=M\cap N$.

（1）指出集合 P 在复平面内的对应点表示的图形；

（2）求集合 P 中复数模的最小值.

7.综合计算

（1）若复数 z_1,z_2满足$|z_1|=2,|z_2|=3,3z_1-2z_2=\frac{3}{2}-\mathrm{i}$，则 $z_1\cdot z_2$=________.

（2）设α,β为一对共轭复数，若$|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$且$\frac{\alpha}{\beta^2}$为实数，则$|\alpha|$=________.

（3）给定$\theta\in[0,2\pi)$，化简$\frac{\cos^4\theta\bullet(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)^8\bullet(1+\mathrm{i}\tan\theta)^5}{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2\bullet(\tan\theta+\mathrm{i})}=$__________ .

8.求值：

（1）设复数 z_1,z_2满足 $|z_1|=|z_1+z_2|=3,|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$, 则 $\log_2|(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}|=$________.

（2）若 $z\in C,\arg(z^2-4)=\dfrac{5\pi}{6},\arg(z^2+4)=\dfrac{\pi}{3}$, 则$z$ 的值是__________.

9.已知关于 x 的二次方程 $(1+\mathrm{i})ax^2+(1+a^2\mathrm{i})x+a^2+\mathrm{i}=0$ 有实根，求实数 a 的值.

10.设 $P(z)=z^2+az+b$ 是关于 z 的复系数二次三项式，且对一切 $|z|=1$ 有 $|P(z)|=1$.

求证：$a=b=0$.

11.x 的二次方程 $x^2+z_1x+z_2+m=0$中,z_1、z_2、m 均是复数，且 $z_1^2-4z_2=16+20\mathrm{i}$.

设这个方程的两个根为 α、β，且满足 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$.求$|m|$的最大值和最小值.

12.（1）设复数 $z_1=(2-a)+(1-b)\mathrm{i},z_2=(3+2a)+(2+3b)\mathrm{i},z_3=(3-a)+(3-2b)\mathrm{i}$, 其中 $a,b\in R$，

当 $|z_1|+|z_2|+|z_3|$ 取得最小值时，$3a+4b=$__________.

（2）已知复数 z 满足 $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=1$，则 $|z|$ 的最大值为________，最小值为_______.

（3） 已知复数 z 满足 $|z|=1$，则 $|z^3+3z+2\mathrm{i}|$ 的最大值为______________.

13.确定所有复数 α，使得对任意复数 $z_1,z_2(|z_1|,|z_2|<1,\ z_1\neq z_2)$，有

$(z_1+\alpha)^2+\alpha\overline{z_1}\neq(z_2+\alpha)^2+\alpha\overline{z_2}$.

14.化简或求值：

（1） $\sin\dfrac{\pi}{5}+\sin\dfrac{2\pi}{5}+\sin\dfrac{3\pi}{5}+\sin\dfrac{4\pi}{5}$；

（2） $\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5}$；

（3） $(1+2\cos\dfrac{2\pi}{5})(1+2\cos\dfrac{4\pi}{5})(1+2\cos\dfrac{6\pi}{5})(1+2\cos\dfrac{8\pi}{5})$.