差分方程建模举例

环保、犯罪学和考古模型

环保问题

【例1】某污水处理厂通过清除污水中的污染物获得可再用的清洁工业用水。该厂的污水处理装置每小时可从处理池清除掉10%的污染残留物。

Q1: 一天后还有百分之几的污染物残留在池中?

Q2: 使污染物减半要多长时间?

Q3: 要降到原来含污染物水平的5%需要多长时间?

【例2】一活水湖上游有固定流量的水流入，同时水通过下游河道流出，湖水体积保持在500万立方米左右。由于受到污染，湖水中某种不能自然分解的污染物浓度达到0.5克/立方米。目前上游的污染已得到治理，流入湖中的水已不含该污染物，但湖周围每天仍有125克这种污染物进入湖中。

环保机构希望湖水水质达到含污染物不超过0.05克/立方米的标准，若不采取其他治污措施，则需要多少时间湖水可以达标（上游污染停止一天后测得湖水中该污染物浓度为0.49875克/立方米）？

犯罪学应用

【例3】某地发生一起凶杀案。下午4：30 刑警和法医到达现场，测得尸体温度为28度，环境温度为18度。

凶杀是什么时候发生的（已知在环境温度为18度的情形下，尸体在最初2小时温度下降2.2度）？

考古模型问题

【例4】（C-14断代） 1972年出土的马王堆一号墓中的木炭中的 C-14的蜕变速度为29.787/分钟，而活树中C-14的蜕变速度为38.73/分钟。

试确定该墓的入葬年代（C-14的半衰期为5730年）。

一阶非线性差分方程——Logistic方程

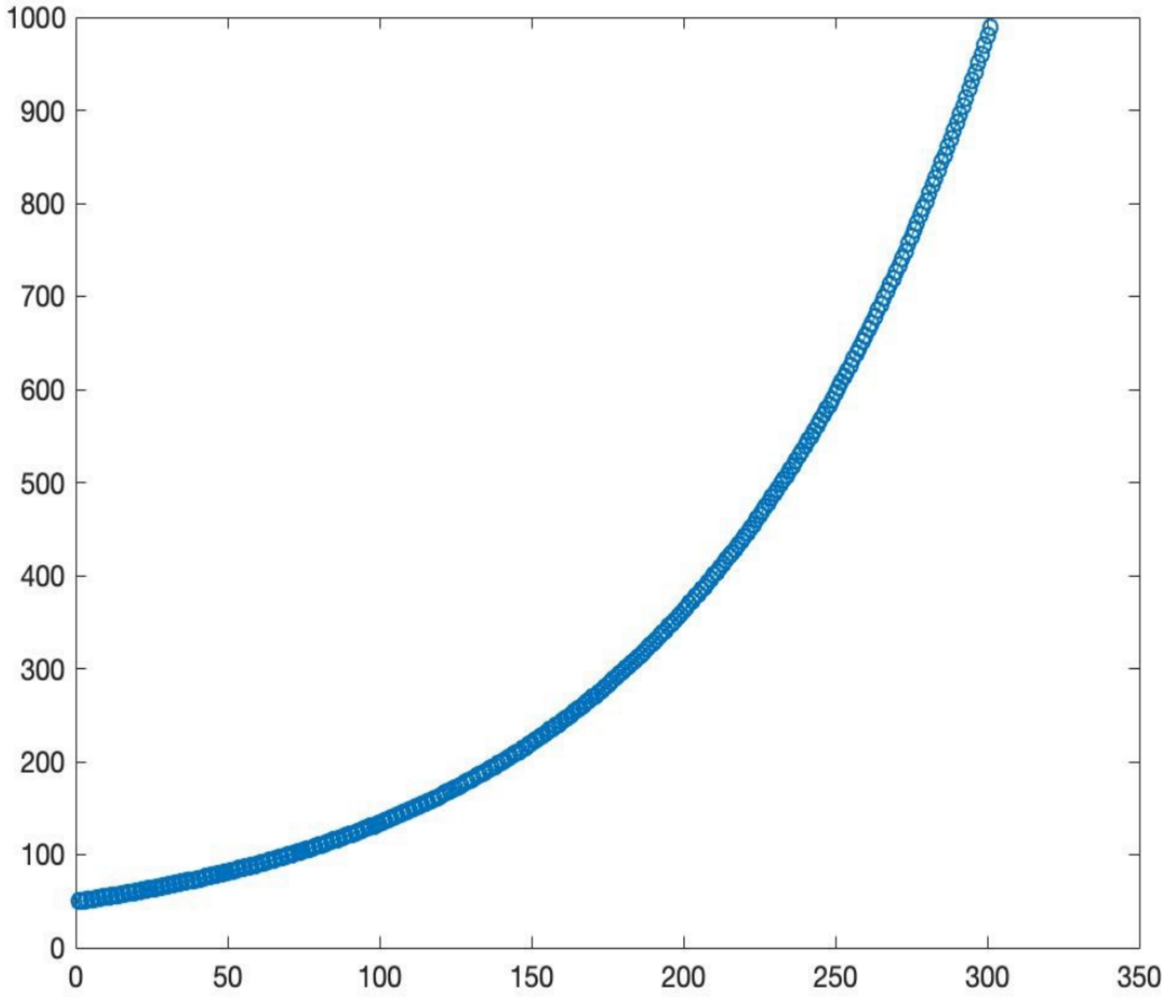
在研究生物群体总数的变化时，若生物群体赖以生存的资源没有 限制，生物总数的增长速度与当时生物总数成正比。

令x_k表示经过k个单位时间后生物的总数，则有

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = r x_k$$

即

$$\Delta x_k = x_0 (1+r)^k, k = 1, 2, \cdots$$



Malthus模型

然而当生物群体赖以生存的资源有限时，Malthus模型失效。 研究发现比例系数r依赖于x_k. 即

$$x_{k+1} - x_k = r(x_k) x_k$$

$r(x_k)$应满足：当x_k增加时，$r(x_k)$减少；

当$r(x_k)$达到某个量b时，$r(x_k)=0$

即

$$r(x_k)=r_0(b-x_k)$$

从而推得一阶非线性差分方程——Logistic方程

$$x_{k+1}-x_k=r_0(b-x_k)x_k$$

非线性方程，一般数值求解！

【例5】设有一种生长资源有限制的生物种群，其总数满足$r_0=0.0001$, $b=10000$的Logistic方程为

$$x_{k+1}-x_k=0.0001(10000-x_k)x_k$$

【例6】假设某寄宿中学宿舍有400个学生，其中有2名学生感染了流感。若流感传染速度和患者人数与尚未得病的人数的乘积成正比。若第2天患者人数达到10人。试建立流感传播的数学模型，若不采取任何措施，需要多长时间，全体学生都被传染。

差分方程组——竞争猎兽模型

斑点猫头鹰、隼为生存竞争，若只有猫头鹰，令x_k表示经过k个单位时间后猫头鹰总数，则有

$$\Delta x_k=k_1x_k$$

同理，若只有隼，令y_k表示经过k个单位时间后隼总数，则有

$$\Delta y_k=k_2y_k$$

然而当生物群体赖以生存的资源有限时，相互制约生存，

一种假设，增长率的减少与两种生物总数的乘积成比例，于是得到

$$\begin{cases}\Delta x_k=k_1x_k-k_3x_ky_k\\ \Delta y_k=k_2y_k-k_4x_ky_k\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_{k+1}=(1+k_1)x_k-k_3x_ky_k\\ y_{k+1}=(1+k_2)y_k-k_4x_ky_k\end{cases}\quad \text{差分方程组}$$

平衡解 —— 与k无关的解，记$x_k=X$,$y_k=Y$, 则

$$\begin{cases}(k_1-k_3Y)X=0,\\ (k_2-k_4X)Y=0.\end{cases}$$

有二组解

$$(X_1, Y_1) = (k_2/k_4, k_1/k_3), (X_2, Y_2) = (0, 0)$$

分别对应两种群共存、两种群都灭绝

由差分方程组可知如其中某一种群数量为0，将灭绝，而另一个种群继续增长！

【例7】斑点猫头鹰、隼为生存竞争。$k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.3$, $k_3 = 0.001$, $k_4 = 0.002$.有平衡解 $(X_1, Y_1) = (150, 200), (X_2, Y_2) = (0, 0)$.