差分方程建模简介

01 引例

引例： 年初时出生一对兔子，这对兔子2个月后有生殖能力。 若每月每对兔子会产生一对幼兔，到年底会有多少对兔子?

02 差分定义与差分方程简介

差分定义

对数列$\{x_k\}$ ——自变量为正整数的特殊函数$x(k)$

$$x_{k+1}-x_k, k=1,2,\cdots$$

构成原数列的差分数列，简称差分，并记

$$x_{k+1}-x_k=\Delta x_k, k=1,2,\cdots$$

Δ称为(一阶)前差算子

仿此, 我们可以定义高阶有限差, 例如, 二阶前差记作

$$\Delta^2 x_k=\Delta[\Delta x_k]=\Delta x_{k+1}-\Delta x_k=x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k$$

n阶前差记作$\Delta^n x_k$，定义为

$$\Delta^n x_k=\Delta\left[\Delta^{n-1} x_k\right]=\Delta^{n-1} x_{k+1}-\Delta^{n-1} x_k$$

差分定义 - 数列

$x_k=\dfrac{1}{k}, x_k=(-1)^k\dfrac{k}{k+1}$变化趋势，极限的概念

$x_k=\dfrac{1}{2}k(k+1)\rightarrow\Delta x_k=k+1$

$x_k=ck+b,\ c,b$ 常数$\rightarrow\Delta x_k=c$

$x_k=\dfrac{1}{2}ck^2+dk+b,\ c,b,d$ 常数$\rightarrow\Delta^2 x_k=c$

差分定义 - 用差分刻画变化趋势

差分方程简介

设N是相邻的整数集合, $x(k)$是定义在集合N上的实值函数， 称方程

$$F(k, x(k), \Delta x(k), \cdots, \Delta^m x(k)) = 0$$

为未知函数$x(k)$的m阶差分方程，其中F为已知函数.

由于方程中各阶前差可用函数值来表示：

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$$
$$\Delta^2 x(k) = x(k+2) - 2x(k+1) + x(k)$$
$$\cdots \quad \cdots$$

因此，差分方程又可表示成

$$G(k, x(k), x(k+1), \cdots, x(k+m)) = 0$$

若存在一个定义在N上的实值函数$x(k)$，使得对所有$k \in \mathrm{N}$,$x(k)$满足上式，则称这样的函数$x(k)$是差分方程的一个解.

例如，差分方程

$$x(k) - x(k+1) + 2k = 0$$

是一个一阶差分方程．函数

$$x(k) = k(k+1) + C \quad \text{通解}$$

是它的解，其中C为任意常数.

例如, $x(0) = x_0$是给定的，称它是初始值， 于是，可以确定

$$C = x_0$$

从而

$$x(k) = k(k+1) + x_0$$

是差分方程的一个解(或者说它是一个特解).

常系数线性差分方程

最简单而又常用的m阶常系数线性差分方程为

$$a_0 x(k) + a_1 x(k+1) + \cdots + a_m x(k+m) = b(k)$$

其中系数$a_0, a_1, \cdots, a_m$，均与n无关，且$a_0 \neq 0, a_m \neq 0$.

$$b(k) = 0\text{齐次差分方程}$$

齐次常系数线性差分方程的通解可以利用齐次差分方程特征方程的根求得.

假定$\mathrm{N}\{1, 2, \cdots\}$我们要寻求形式为

$$x(k)=z^k$$

的解，将它代入齐次差分方程得

$$a_0z^k+a_1z^{k+1}+\cdots+a_mz^{n+m}=0,$$

特征方程与特征根

因此$z=0$，或

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m=0. \text{(*)}$$

由$z = 0$得$x(k)=0$，齐次差分方程的平凡解.

(*) 称为差分方程的特征方程，它的根称为特征根.

(一) 特征根均为单重根的情形

设特征方程有m个互异的根$z_1,z_2,\cdots,z_m$均为实数，则$z_1^k,z_2^k,\cdots,z_m^k$是齐次差分方程的m个线性无关解．此时

$$x(k)=C_1z_1^k+C_2z_2^k+\cdots+C_mz_m^k$$

为齐次差分方程的通解，其中$C_1,C_2,\cdots,C_m$为任意常数.

当给定m个初值时，系数$C_1,C_2,\cdots,C_m$可惟一确定.

(二) 重根情形

设特征方程 (1.7) 有重数分别为$s_1,s_2,\cdots,s_p$的p个不同重实根

$$Z_1,Z_2,\cdots,Z_p,S_1+S_2+\cdots S_p=m.$$

通解可表示成

$$x(k)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{s_j}C_{l,j}k^{l-1}z_j^k,$$

其中$C_{l,j}$为任意常数 ($l = 1$ ， $\cdots s$ ， $j = 1$ ， $\cdots,p$).

注：特征根为复根情形（略）

03 高考数列应用题举例

高考常见数列通项求解

【例3】求解差分方程$x_{k+1}=rx_k+b,k=0,1,2,\cdots$,其中$r$和$b$常数

高考数列应用题举例

【例4】（2002年全国高考题）某城市2001年末汽车保有量为30万辆，预计此后每年报废上年末汽车保有量的6%，并且每年新增汽车数量相同，为保护城市环境，要求该城市汽车保有量不超过60万辆.

那么每年新增汽车数量不应超过多少辆?

【例5】（生态问题）某地区森林原有木材存量为S, 且每年增长率为25%，因生产建设的需要每年年底要砍伐的木材量为 T, 设S_n为n年后该地区森林木材的存量，

（1）求S_n的表达式；

（2）为保护生态环境，防止水土流失，该地区每年的森林木材存量不少于$\dfrac{7}{9}S$，如果$T=\dfrac{19S}{72}$，那么该地区今后会发生水土流失吗？若会，需要经过几年?

04 金融和经济学模型

金融和经济学模型

【例6】设某种货币1年期存款的利率为r（年利率）. 若存入P元，过n年取出，可得本利和为多少?

贷款问题

【例7】房贷还款问题： 小明的父母计划买房，需要贷款100万元，计划20年还清。 目前贷款年利率为4.41%。国内房贷还款方式主要分为等额本金和等额本息两种。请通过你认为令人信服的方法，给小明的父母提出建议如何选择还贷方式。

贷款额：$S_0=1000000$元

还款月数：$m=20\times 12=240$月

月利率：$r=4.41\%/12$

两种还款方式解释如下：

等额本金还款法，即借款人每月按相等的金额（贷款金额/贷款月数）偿还贷款本金，每月贷款利息按月初剩余贷款本金计算并逐月结清，两者合计即为每月的还款额。

等额本息还款法：是指每月按相等的金额偿还贷款本息，其中每月贷款利息按月初剩余贷款本金计算并逐月结清。这种方式是将贷款本金和总利息额相加除以还款期限得出每月平均还款金额，这种方式每月还款金额固定。

05 应用举例

牛顿传热定律

【练习1】物体温度下降服从牛顿定律：物体温度下降的速度正比于物体和外界的温度。设t_k表示物体第k分钟时的温度，牛顿传热定律可以写成：

$$t_{k+1}-t_k=-\alpha(t_k-t_e)$$

其中t_e为外界温度，α为比例系数，称为牛顿热传系数。

有一罐25度的饮料放入冰箱的冷藏室内。若冷藏室的温度为10度，设牛顿传热系数为0.0081，则需要多长时间饮料可以下降到18度?

环保问题

【练习2】某污水处理厂通过清除污水中的污染物获得可再用的清洁工业用水。该厂的污水处理装置每小时可从处理池清除掉10%的污染残留物。

Q1: 一天后还有百分之几的污染物残留在池中?

Q2: 使污染物减半要多长时间?

Q3: 要降到原来含污染物水平的5%需要多长时间?

【练习3】一活水湖上游有固定流量的水流入，同时水通过下游河道流出，湖水体积保持在500万立方米左右。由于受到污染，湖水中某种不能自然分解的污染物浓度达到0.5克/立方米。目前上游的污染已得到治理，流入湖中的水已不含该污染物，但湖周围每天仍有125克这种污染物进入湖中。

环保机构希望湖水水质达到含污染物不超过0.05克/立方米的标准，若不采取其他治污措施，则需要多少时间湖水可以达标（上游污染停止一天后测得湖水中该污染物浓度为0.49875克/立方米）？

犯罪学应用

【练习4】某地发生一起凶杀案。下午4：30 刑警和法医到达现场，测得尸体温度为28度，环境温度为18度。

凶杀是什么时候发生的（已知在环境温度为18度的情形下，尸体在最初2小时温度下降2.2度）？

提示：物体温度下降服从牛顿定律：物体温度下降的速度正比于物体和外界的温度。设T_k表示物体第k分钟时的温度，牛顿传热定律可以写成：

$$T_{k+1}-T_k=-\alpha(T_k-T_e)$$

其中T_e为外界温度，α为比例系数，称为牛顿热传系数。

尸体温度应满足上述牛顿传热定律

考古模型问题

【练习5】（C-14断代） 1972年出土的马王堆一号墓中的木炭中的 C-14的蜕变速度为29.787/分钟，而活树中C-14的蜕变速度为38.73/分钟。

试确定该墓的入葬年代（C-14的半衰期为5730年）。

一阶非线性差分方程——Logistic方程

【练习6】假设某寄宿中学宿舍有400个学生，其中有2名学生感染了流感。若流感传染速度和患者人数与尚未得病的人数的乘积成正比。若第2天患者人数达到10人。试建立流感传播的数学模型，若不采取任何措施，需要多长时间，全体学生都被传染。