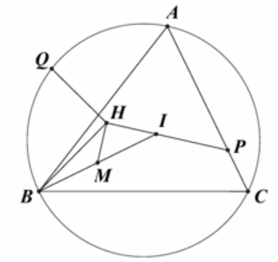
2022江苏省数学学会暑期学校讲义——平面几何

江苏省天一中学 李维维

一、平行与垂直

1、如图，在等腰△ABC中，$AB=BC$，I为内心，M为BI的中点，P为边AC上一点，满足$AP=3PC$，PI延长线上一点H满足$MH\perp PH$，Q为△ABC的外接圆上劣弧AB的中点.证明：$BH\perp QH$.

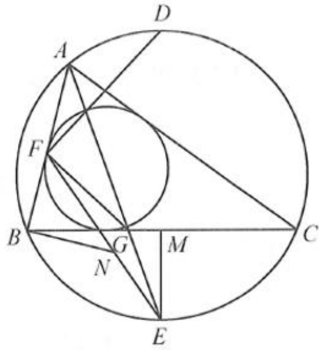


2、设△ABC的内心I在BC上的射影为D, 点E、F分别在线段IB、IC上, 且$\angle EAF=\dfrac{1}{2}\angle BAC$. 求证: $DE\perp DF$.

3、设O、H分别是△ABC的外心和垂心, 过AH的中点M且垂直于BK的直线与AC交于P. 求证: $OP\parallel BC$.

二、四点共圆

1、如图，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，$AB<AC$，M 为 BC 边的中点，点 D 和 E 分别为$\triangle ABC$ 的外接圆弧 BAC 和弧 BC 的中点，F 为$\triangle ABC$ 的内切圆在 AB 边上的切点，G 为 AE 与 BC 的交点，N 在线段 EF 上，满足 $NB\perp AB$.证明:若 $BN=EM$，则 $DF\perp FG$.



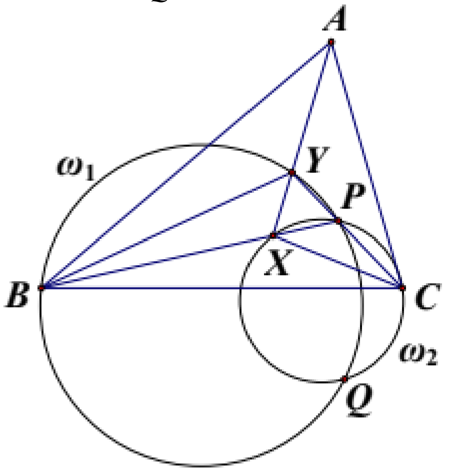
2、设 O 是锐角$\triangle ABC$ 的外心, AD 是$\triangle ABC$ 的高(D 在 BC 上), 直线 AD 与 CO 交于 E, M 是 AE 上一点, 过 C 作 AO 的垂线, 垂足为 F, 直线 OM 与 BC 交于 P. 求证: O、B、F、P 四点共圆的充分必要条件是 M 为 AE 的中点.

3、在$\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, I 是$\triangle ABC$ 的内心, 直线 BI 与 AC 交于 D, 过点 D 且垂直于 AC 的直线与 AI 交于 E. 求证: 点 I 关于 AC 的对称点在$\triangle BDE$ 的外接圆上.

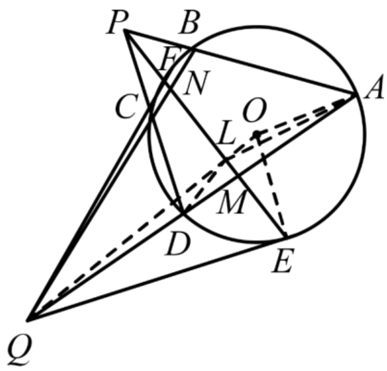
三、共点与共线

1、如图，在△ABC 中，$AB>AC$，△ABC 内两点 X，Y 均在∠BAC 的平分线上，且满足∠ABX=∠ACY，设 BX 的延长线与线段 CY 交于点 P，△BPY 的外接圆与△CPX 的外接圆交于点 P 及另一点 Q.

证明：A，P，Q 三点共线.



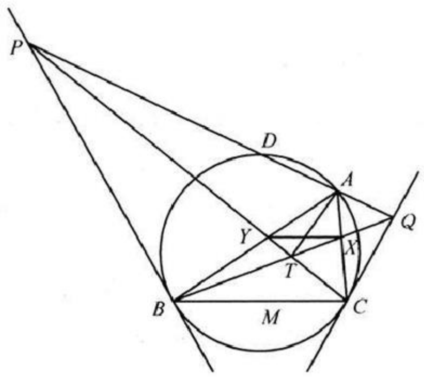
2、如图，四边形 $ABCD$ 内接于圆，其边 AB， DC 的延长线交于点 P， AD 和 BC 的延长线交于点 Q，过 Q 作该圆的两条切线，切点分别为 E， F . 求证： P， E， F 三点共线.



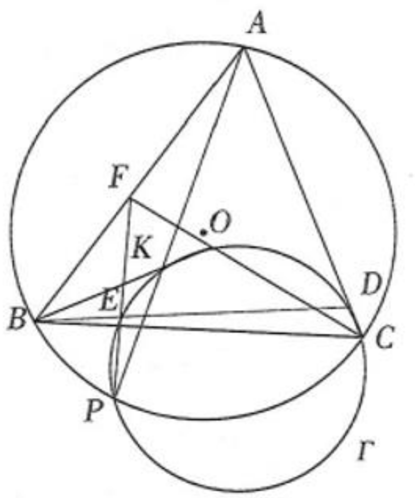
3、设 O 是△ABC 的外心, AD 是高, 点 D 在 AB、AC 上的射影分别是 E、F, AB、AC 的中点分别是 M、N, MF 与 NE 交于 P. 求证: D、O、P 三点共线.

四、重要定理

1、如图，点 D 是锐角△ABC 的外接圆ω上弧 BC 的中点，直线 DA 与圆 ω 过点 B、C 的切线分别相交于点 P、Q，BQ 与 AC 的交点为 X，CP 与 AB 的交点为 Y，BQ 与 CP 的交点为 T.求证：AT 平分线段 XY.



2、如图，△ABC 内接于圆 O，P 为弧 BC 上一点，点 K 在线段 AP 上，使得 BK 平分∠ABC.过 K，P，C 三点的圆与边 AC 交于点 D，联结 BD 交圆Γ于点 E，联结 PE 并延长与边 AB 交于点 F.证明：∠ABC=2∠FCB.

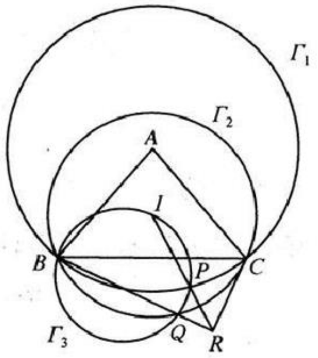


3、在△ABC 中, ∠BAC 的平分线与△ABC 的外接圆的另一交点为 D, M 是 BC 的中点, P 是过点 M 且垂直于 AD 的直线上一点, 过点 P 且垂直于 PD 的直线与直线 AB、AC 分别交于 E、F. 求证: P 是 EF 的中点.

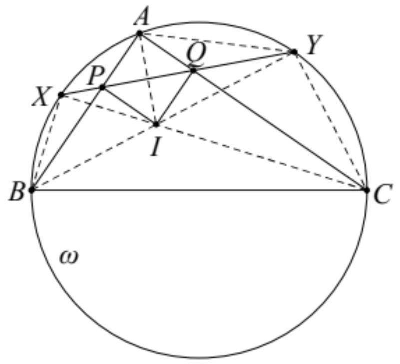
五、三角形的心

1、如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，I为$\triangle ABC$的内心，以A为圆心，AB为半径作圆Γ_1，以I为圆心，IB为半径作圆Γ_2，过点B、I的圆Γ_3与Γ_1,Γ_2分别交于点P、Q(不同于点B).设IP与BQ交于点R.

证明：$BR\perp CR$.



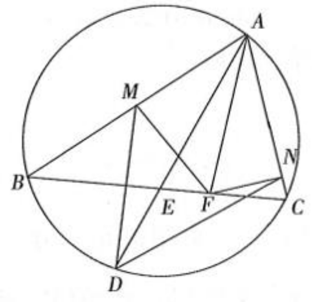
2、如图，I是$\triangle ABC$的内心，点P，Q分别为I在边AB，AC上的投影，直线PQ与$\triangle ABC$的外接圆相交于点X，Y(P在X，Q之间).已知B，I，P，X四点共圆，证明：C，I，Q，Y四点共圆.



3、设H是锐角$\triangle ABC$的垂心, M、N分别是AB、AC的中点, 点H在四边形$BMNC$的内部, 圆(HBM)与圆(HCN)相切. 过点H且平行于BC的直线与圆(HBM)和圆(HCN)的另一交点分别为E、F, 直线ME与NF交于D, J是$\triangle HMN$的内心. 求证: $DJ = DA$.

六、等角线背景

1、如图，在锐角$\triangle ABC$的BC边上有两点E，F，满足$\angle BAE=\angle CAF$，作$FM\perp AB$，$FN\perp AC$(M，N为垂足)，延长AE交三角形ABC的外接圆于点D.证明：四边形$AMDN$与三角形ABC的面积相等.



2、设O是$\triangle ABC$的外心, K是$\triangle BOC$的外心, 直线AB、AC分别交$\triangle BOC$的外接圆于另一点M、N, L是点K关于直线MN的反射点. 求证: $AL\perp BC$.

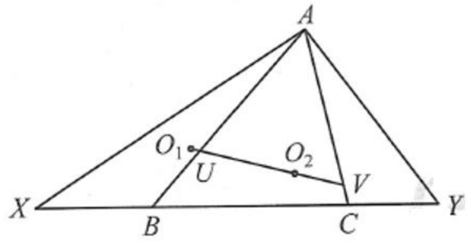
3、在$\triangle ABC$中, $\angle BAC$的平分线与BC交于D, $\triangle ABD$的外接圆在D点的切线与AC交于E, $\triangle ADC$的外接圆在D点的切线与AB交于F, BE与CF交于P. 求证: $\angle EDP=\angle ADF$.

七、根轴与根心

1、如图所示，在△ABC中，X、Y是直线BC上两点(X，B，C，Y顺次排列)，使得$BX \cdot AC = CY \cdot AB$.

设△ACX、△ABY的外心分别为O_1, O_2，直线O_1O_2与AB、AC分别交于点U、V.

证明:△AUV是等腰三角形.

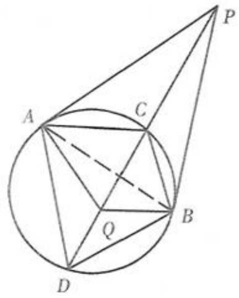


2、设△ABC的内切圆与边BC切于D, 过点A且垂直于AB的直线与$\angle CBA$的平分线交于E, 过点A且垂直于AC的直线与$\angle ACB$的平分线交于F. 求证: $AD \perp EF$.

3、设点E、F分别在△ABC的边AB、AC上, 且$EB = BC = CF$, 直线CE与BF交于D; I是△ABC的内心, H是△DEF的垂心, M是△ABC的外接圆上BAC的中点. 求证: I、H、M三点共线.

八、调和四边形

1、过圆外一点 P 作圆的两条切线和一条割线，切点为 A，B，所作割线交圆于 C，D 两点，C 在 P，D 之间在弦 CD 上取一点 Q，使 $\angle DAQ=\angle PBC$.求证：$\angle DBQ=\angle PAC$.



2、设 I 是非等腰$\triangle ABC$ 的内心, 过点 I 且垂直于 AI 的直线与直线 BC 交于 D, M 是$\triangle ABC$ 的外接圆上 BAC 的中点, 直线 MI 与圆(IBC)的另一交点为 E. 求证: DE 与圆(IBC)相切.

3、设 $ABCD$ 是一个圆内接四边形, $\angle BAD$ 的平分线与$\angle DCB$ 的平分线交于对角线 BD 上, M 是 BD 的中点, 过点 C 且平行于 AD 的直线与直线 AM 交于 P. 求证: $\triangle DPC$ 是一个等腰三角形.