一、递推关系式求通项公式常用方法

例 1　有 10 层台阶，每一步可上一层也可上二层，则有多少上法？

例 2　已知数列{ a_n }满足：$a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$，求 a_n.

例 3　已知数列{ a_n }满足：$a_0 = 0$，$a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1}$，求 a_n.

例 4　已知数列{ a_n }满足：$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{4a_n + 2}{2a_n + 7}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，求 a_n.

例 5　已知数列{ x_n }满足：x_1=1，$x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，求 x_n.

例 6　正数数列{x_n}，{y_n}满足 $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$，$y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n$，证明：存在正整数 n_0，对任意正整数 $n > n_0$，有 $x_n > y_n$ 恒成立.

例 7　若数列{a_n}满足 $a_1 = a_2 = 1$，$a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$（$n$≥3，$n \in \mathbf{N}^*$），求通项公式.

例 8　数列{a_n}满足：$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + (-1)^n}{a_{n-1}}$，$n = 2$，3，4，…，证明：该数列任意两个相邻项的平方和仍是该数列中的一项.

例 9　（2001 全国）设数列{a_n}，{b_n}满足：$a_0 = 1$，$b_0 = 0$，且

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3, \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4, \end{cases} (n = 0,1,2,3,\cdots).$$

证明：$a_n\,(n = 0,1,2,3,\cdots)$ 是完全平方数.

例 10 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：$a_1 = 3$，$b_1 = 1$，且对任意的$n \in \mathbf{N}^*$，均有

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n + \sqrt{a_n^2 - a_n b_n + b_n^2}, \\ b_{n+1} = a_n + b_n - \sqrt{a_n^2 - a_n b_n + b_n^2}. \end{cases}$$

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$[x]$表示不超过实数x的最大整数，令$S_n = \sum_{i=1}^{n} [a_i]$，$T_n = \sum_{i=1}^{n} [b_i]$，求最小的$n \in \mathbf{N}^*$，使得$\sum_{k=1}^{n} \left(S_k + T_k\right) > 2017$.

二、用换元法化归为新数列

例 11 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n})$，求 a_n.

例 12 数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4a_n}$，$n = 1$，2，⋯.

证明：对任意 $n > 1$，$\sqrt{\frac{2}{2a_n^2 - 1}}$ 均为正整数.

例 13 （1993 全国联赛）设正数列 a_0，a_1，a_2，⋯，a_n，⋯满足

$\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = 2a_{n-1} \left(n \geqslant 2\right)$，且 $a_0 = a_1 = 1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

例 14 （2018 年全国一试 8）设整数数列 a_1，a_2，⋯，a_{10} 满足：$a_{10} = 3a_1$，$a_2 + a_8 = 2a_5$，且 $a_{i+1} \in \{1 + a_i, 2 + a_i\}$，$i = 1$，2，…，9，则这样的数列的个数为____________.

三、证明数列性质

有些问题，难以求出通项公式，可利用条件证明相关性质解决问题（如不动点、有界性、单调性、周期性等）.

例 15 （2008 武大）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=2$.

（1）求证：$3-a_{n+1}<\dfrac{2}{3}(3-a_n)$；

（2）求证：$a_n<a_{n+1}$.

例 16 证明：方程 $2x^3+5x-2=0$ 恰有一个实数根 r，且存在唯一的严格递增正整数数列$\{a_n\}$，使得 $\dfrac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$.（2010 联赛）

例 17 已知 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$，设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{1+k^2+k^4}$，$T_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^3-1}{k^3+1}$，证明：$S_nT_n=\dfrac{1}{3}$.

例 18 （2018 波黑）设数列 a_1，a_2，…，a_{2018} 中的每一项都取于集合 $\{-1，1\}$，设和式 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2018}a_ia_j$ 既可以取正值，也可以取负值，求 S 的最小值.

例 19 （2018 IMO）求所有的整数 $n\geqslant 3$，使得存在实数 a_1，a_2，…，a_{n+1}，a_{n+2}，满足 $a_{n+1}=a_1$，$a_{n+2}=a_2$，$a_i\,a_{i+1}+1=a_{i+2}$，对所有的 $i=1，2，\cdots，n$ 成立.

五、构造数列解决计数问题

例 20 用 1，2，3 这三个数字来构造 n 位数，但不允许有两个紧挨着的 11 出现在 n 位数中（例如 $n=5$ 时，31123 是不允许的），问：能构造出多少个这样的 n 位数？

例 21 设 a_n 为下述自然数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n 且每位数字只能取 1，3 或 4．求证：a_{2n} 是完全平方数.