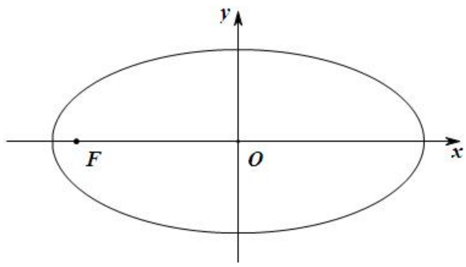
解析几何问题选讲

一、解解析几何题的一般策略

（一）基本运算：灵活转化是关键

1．在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．若点 P 在 y 轴上，AB 过左焦点 F，且△PAB 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形，求直线 AB 的方程．

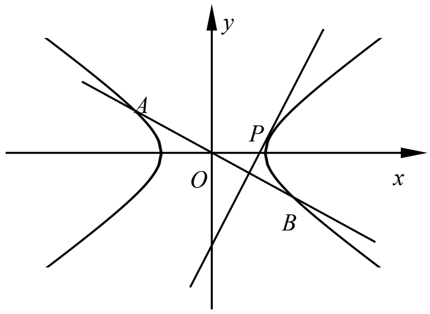


（第 1 题）

2．在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右焦点为(3，0)，且经过点$(2\sqrt{2}，1)$．

（1）求双曲线 C 的标准方程；

（2）已知 A，B 是双曲线 C 上关于原点对称的两点，垂直于 AB 的直线 l 与双曲线 C 有且仅有一个公共点 P．当点 P 位于第一象限，且△PAB 被 x 轴分割为面积比为 3：2 的两部分时，求直线 AB 的方程．



（第 2 题）

3．在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2．设 P 是第一象限内椭圆 C 上的一点，PF_1，PF_2 的延长线分别交椭圆 C 于点 Q_1，Q_2．设△PF_1Q_2 和△PF_2Q_1 的内切圆半径分别为 r_1，r_2，求 r_1-r_2 的最大值．（2021 全国联赛）

（二）简化运算：准确利用几何特征

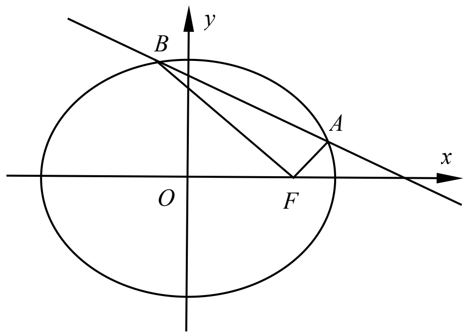
4．（1）已知抛物线 C：$y^2=2px$．AB 为过抛物线焦点 F 的弦，O 为坐标原点，M 为抛物线的准线与 x 轴的交点．若 $\angle OFA=120°$，则 $\tan\angle AMB=$________．

（2）设椭圆 C 的两个焦点是 F_1，F_2，过点 F_1 的直线与 C 交于点 P，Q．若 $PF_2=F_1F_2$，且 $3PF_1=4F_1Q$，则椭圆 C 的短轴与长轴的比值为________．（2015 年全国联赛）

5．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，离心率为$\dfrac{1}{2}$．过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$，则△ADE 的周长是__________．（2022 新高考 1 卷）

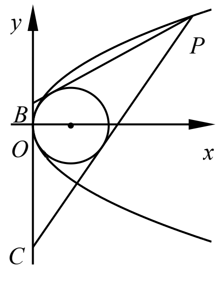
6．设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，点 M 的坐标为 $(2，0)$．设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$．

7．设 F 为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点，过点 $(2，0)$ 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点．设直线 AF，BF 的斜率分别为 k_1，$k_2(k_2\neq0)$，求证：$\dfrac{k_1}{k_2}$为定值．



（第 7 题图）

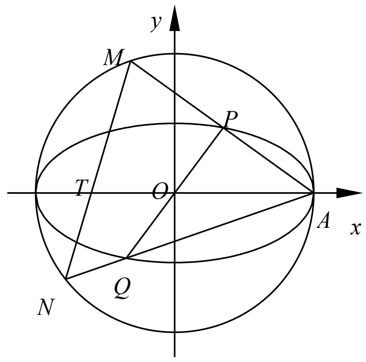
8．P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的动点，点 B，C 在 y 轴上，圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 内切于△PBC，求△PBC 面积的最小值．



（三）有效突破：掌握常见结论

9．已知点 $A(2，1)$在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，直线 l 交 C 于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 的斜率之和为 0，求 l 的斜率．（2022 新高考 1 卷）

10．已知定点 $T(-\frac{6}{5}，0)$，点 A 是椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右顶点，PQ 是椭圆 C 的过原点 O 的弦，直线 AP 与圆 O 交于点 M，直线 MT 与圆 O 交于点 N，证明：点 A、Q、N 三点共线．



11．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，点 M，N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足．

证明：存在定点 Q，使得$|DQ|$为定值．

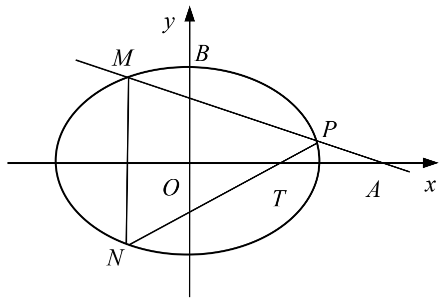
12．作斜率为$\frac{1}{3}$的直线 l 与椭圆 C:$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ 交于 A、B 两点，且 $P(3\sqrt{2},\sqrt{2})$在直线 l 的左上方．(2011 全国联赛)

①证明：$\triangle PAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上；

②若$\angle APB=60°$，求$\triangle PAB$ 的面积．

（四）厘清思路：把握解题的一般策略

13．在平面直角坐标系 xOy 中，P 为椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上一动点，过点 $A(4，0)$和 P 的直线 l 与椭圆 C 的另一个焦点为 M，M 关于 x 轴的对称点为 N，求证：直线 PN 过定点，并求出定点坐标．



14．已知直线 l：$y=x+m$ 交抛物线 C：$y^2=4x$ 于 A，B 两点．若点 M，N 在抛物线 C 上，且关于直线 l 对称，求证：A，B，M，N 四点共圆．

15．抛物线 C 的顶点为坐标原点 O．焦点在 x 轴上，直线 l：$x=1$ 交 C 于 P，Q 两点，且 $OP\perp OQ$．

已知点 $M(2，0)$，且⊙M 与 l 相切．

（1）求 C，⊙M 的方程；

（2）设 A_1，A_2，A_3 是 C 上的三个点，直线 A_1A_2，A_1A_3 均与⊙M 相切．判断直线 A_2A_3 与⊙M 的位置关系，并说明理由．

二、解析几何中的几个常见工具

（一）参数方程与极坐标方程

1．在平面直角坐标系中，点集 $M=\{(x,\ y)|\begin{cases}x=\sin\alpha+\cos\beta,\\ y=\cos\alpha+\sin\beta,\end{cases}\ \alpha,\ \beta\in\mathbf{R})\}$．求点集 M 所覆盖的平面图形的面积．

2．已知抛物线 $y^2=2x$ 及点 $P\,(1,\ 1)$，过点 P 的两条不重合的直线 l_1，l_2 与这抛物线分别交于点 A_1，B_1，A_2，B_2，l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2． 证明：A_1，B_1，A_2，B_2 四点共圆的充要条件为 $k_1+k_2=0$．

3．过椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的右焦点 F 作两条互相垂直的弦 AB，CD，设 AB，CD 的中点分别为 M，N．若弦 AB，CD 的斜率都存在，求△FMN 面积的最大值．

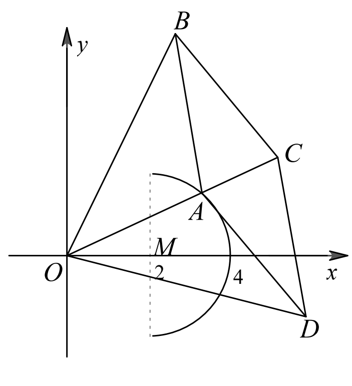
4．如图，在平面直角坐标系 XOY 中，菱形 $ABCD$ 的边长为4，且 $|OB|=|OD|=6$．

（1）求证：$|OA|\cdot|OC|$ 为定值；

（2）当点 A 在半圆 M：$(x-2)^2+y^2=4(2\leqslant x\leqslant 4)$

上运动时，

求点 C 的轨迹．（2012 全国联赛题）

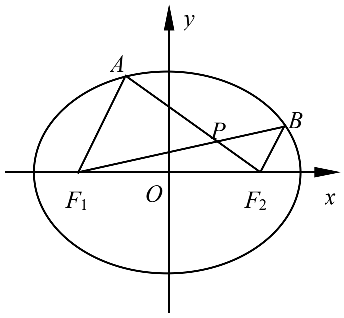


5．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，定直线 l 与椭圆 C 不相交．P 为直线 l 上任意一点，射线 OP（O 为坐标原点）与椭圆 C 交于点 R，点 Q 在射线 OP 上，满足 $OQ\cdot OP=OR^2$．过点 Q 作直线 l_p 与椭圆 C 相交，且点 Q 为弦的中点，证明：直线 l_p 过定点．

6．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，A，B 是椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上位于 x 轴上方的两点，且直线 AF_1 与直线 BF_2 平行，AF_2 与 BF_1 交于点 P．

（1）若 $AF_1-BF_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$，求直线 AF_1 的斜率；

（2）求证：PF_1+PF_2 是定值．



（二）切线与切点弦

7．（1）在平面直角坐标系 xOy 中，对任意的实数 m，集合 A 中的点$(x，y)$都不在直线 $2mx+(1-m^2)y-4m-2=0$ 上，则集合 A 所对应的平面图形面积的最大值是_______．

（2）若直线系 C：$x\cos t+(y+1)\sin t=2$ 中的三条直线围成正三角形区域 D，则区域 D 的面积为_____________．

8．设 P 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上的一个动点，过点 P 作椭圆的切线，与圆 O：$x^2+y^2=12$ 相交于 M、N 两点．圆 O 在 M、N 两点处的切线相交于点 Q．

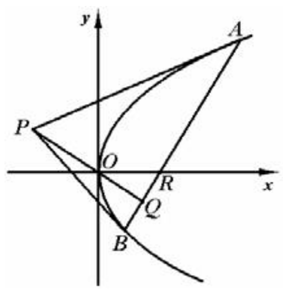
（1）求 Q 点的轨迹方程；

（2）若 P 是第一象限的点，求△OPQ 面积的最大值．

9．平面直角坐标系xOy中，P是不在x轴上的一个动点，满足条件：过P可作抛物线$y^2=4x$的两条切线，两切点连线l_P与PO垂直．设直线lP与直线PO，x轴的交点分别为Q，R．（2015 年全国联赛）

（1）证明R是一个定点；

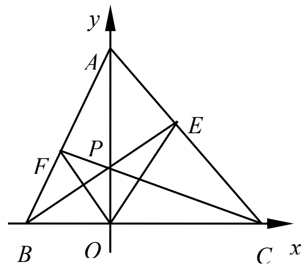
（2）求$\frac{PQ}{QR}$的最小值．



10．从直线 l：$\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$ 上任意一点 P 向椭圆 C：$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$ 引切线 PA，PB，切点为 A，B，求线段 AB 中点 M 的轨迹．

（三）曲线系方程

11．如图，设三角形 ABC 的顶点分别为 $A(0，a)$，$B(b，0)$，$C(c，0)$，点 $P(0，p)$为线段 AO 上的一点（异于端点），这里 a，b，c，p 均为非零实数．设直线 BP，CP 分别交 AC，AB 于点 E，F．求直线 OE，OF 的方程．



12．关于 x，y 的方程 C：$x^2+y^2-2x-4y+m=0$．若圆 C 与直线 l：$x+2y-4=0$ 相交于 M，N 两点，且 $OM\perp ON$（O 为原点），求此时 m 的值．

13．设 $0<a<b$，过定点 $A(a，0)$ ，$B(b，0)$分别引直线 l，m，交抛物线 $y^2=x$ 于四点．若这四点共圆，求 l，m 的交点 P 的轨迹．

14．在“筝形”$ABCD$ 中，$AB=AD$，$BC=CD$．过 AC，BD 的交点 O 任作两条直线，分别交 AD 于 E，交 BC 于 F，交 AB 于 G，交 CD 于 H．GF，EH 分别交 BD 于 I，J，求证：$IO=JO$．

15．在直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F．分别过 O，F 的两条弦 AB，CD 相交于 E（异于 A，B，C，D），且 $OE=EF$，求证：直线 AC，BD 的斜率之和为定值．

（四）韦达定理的应用

16．在平面直角坐标系中，已知圆 C_1 与 C_2 圆相交于 P，Q，点 P 的坐标为(3，2)，两圆半径的乘积为$\dfrac{13}{2}$．若圆 C_1 和 C_2 均与直线 l：$y=kx$ 和 x 轴相切，则 $k=$___________．

17．设直线 L：$y=kx+m$(其中 k，m 为整数)，与椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 交于不同两点 A、B，与双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 交于不同两点 C、D，问是否存在直线 L，使向量$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$．若存在，指出这样的直线有多少条？若不存在，说明理由．

18．点 P 是双曲线 $xy=1$ 上的一点，点 P 关于原点对称的点为 Q，以点 P 为圆心，PQ 为半径的圆与双曲线 $xy=1$ 交于点 A，B，C，Q，证明：$\triangle ABC$ 为正三角形．