

不等式

1 基础知识

定理 1. (Cauchy-Schwarz) 设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right),$$

而且等号成立当且仅当 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 对应成比例.

注记 1. 恒等式

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

就是拉格朗日 (Lagrange) 恒等式, 当 $n = 2$ 时,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

定理 2. (均值不等式) 设 $n \geq 2, x_1, x_2, \dots, x_n$ 为正实数, 则

$$(1) \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}, \text{ 等号成立当且仅当所有 } x_i \text{ 都相等.}$$

$$(2) \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}, \text{ 等号成立当且仅当所有 } x_i \text{ 都相等.}$$

均方根平均数 $\geq$ 算术平均数 $\geq$ 几何平均数 $\geq$ 调合平均数.

定理 3. (排序不等式) 如果 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, 满足:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n; \quad b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n.$$

则有不等式

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \text{ (同序乘积之和)} \\ & \geq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \text{ (乱序乘积之和)} \\ & \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \text{ (反序乘积之和),} \end{aligned}$$

其中 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的任一排列, 并且上述不等式中等号均成立的充分必要条件是 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 成立.

定理 4. (契比雪夫(Chebshev)不等式) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ 是 $2n$ 个实数. 若 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n; b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, 则

$$n \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \leq n \sum_{k=1}^n a_k b_k,$$

或

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k,$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 时上述等号成立.

定义 1. 设 f 是区间 I 上的函数.

(1) 若对 I 中的任意两点 x_1, x_2 , 和任意 $\lambda \in [0, 1]$, 都有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是 I 的(上)凸函数. 若对 I 中的任意不同的两点 x_1, x_2 , 和任意 $\lambda \in [0, 1]$, 都有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是严格(上)凸函数.

(2) 若对 I 中的任意两点 x_1, x_2 , 和任意 $\lambda \in [0, 1]$, 都有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的下凸函数. 若对 I 中的任意不同的两点 x_1, x_2 , 和任意 $\lambda \in [0, 1]$, 都有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是严格下凸函数. (下凸函数也称为凹函数)

定理 5. (二阶导数与凸凹性的关系) 设 f 在区间 I 上二次可导.

(1) f 是区间 I 上的凹函数的充分必要条件是 $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$. 特别地, 若对任意 $x \in I$, 都有 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上是严格凹函数;

(2) f 是区间 I 上的凸函数的充分必要条件是 $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$. 特别地, 若对任意 $x \in I$, 都有 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上是严格凸函数.

定理 6. (琴生(Jensen)不等式) 设 f 是区间 I 上的函数, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, $q_1, q_2, \dots, q_n$ 是非负实数且 $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$,

(1) 若 $f(x)$ 是 I 上的凹函数, 则

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \dots + q_nf(x_n);$$

$$\text{特别地, } f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

(2) 若 $f(x)$ 是 I 上的 (上) 凸函数, 则

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \dots + q_nf(x_n).$$

$$\text{特别地, } f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

2 例题选讲

1. 设 $n \geq 2$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为正实数且 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i^2} = 1$. 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i^2} \leq \sqrt{n-1}$.

2. 设 a, b 是正实数. 求 $S = \frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+3)^2}{a}$ 的最小值.

3. 假设 $x, y, z \geq 1$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, 证明:

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

4. 设 a, b, c 是正实数, 且满足 $abc = 1$. 证明:

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a}) \leq 1.$$

5. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是正实数且 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+a_1+\dots+a_{i-1}+a_{i+1}+\dots+a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

6. 设 a, b, c 是正实数, 证明: $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

7. 设 a, b, c 是正实数, 证明: $a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}$.

8. 设整数 $n \geq 3$. 已知正实数 $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1$. 证明:

$$\frac{a_1 a_2}{a_3} + \frac{a_2 a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-2} a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n-1} a_n}{a_1} + \frac{a_n a_1}{a_2} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

9. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是正实数且 $\sum_{i=1}^n a_i = n$. 证明: 对任意非负实数 k , 有

$$a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \dots + a_n^{k+1} \geq a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k.$$

10. 设 $a, b, c, d > 0$, 且 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$, 证明:

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$$

11. 设 $a, b, c, d > 0$, 且满足 $a+b+c+d=4$, 证明:

$$\frac{1}{11+a^2} + \frac{1}{11+b^2} + \frac{1}{11+c^2} + \frac{1}{11+d^2} \leq \frac{1}{3}.$$

12. 设 $a, b, c, d > 0$, 且满足 $a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, 证明:

$$2(a + b + c + d) \geq \sqrt{a^2 + 3} + \sqrt{b^2 + 3} + \sqrt{c^2 + 3} + \sqrt{d^2 + 3}.$$

13. 设 $a, b, c > 0$, 且满足 $a + b + c = 3$, 证明:

$$\frac{1}{c^2 + a + b} + \frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} \leq 1.$$

14. 设 $a, b, c > 0, 0 \leq k < 2$, 证明:

$$\frac{a^2 - bc}{b^2 + c^2 + ka^2} + \frac{b^2 - ca}{c^2 + a^2 + kb^2} + \frac{c^2 - ab}{a^2 + b^2 + kc^2} \geq 0.$$

15. 设 $a, b, c, d > 0$, 且 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$, 证明:

$$\frac{1}{5 - a} + \frac{1}{5 - b} + \frac{1}{5 - c} + \frac{1}{5 - d} \leq 1.$$

16. 设 $a, b, c > 0$, 且 $a^4 + b^4 + c^4 = 3$, 证明:

$$\frac{1}{4 - ab} + \frac{1}{4 - bc} + \frac{1}{4 - ca} \leq 1.$$

17. 设 $a, b, c > 1$, 且满足条件 $\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - 1} + \frac{1}{c^2 - 1} = 1$, 证明:

$$\frac{1}{a + 1} + \frac{1}{b + 1} + \frac{1}{c + 1} \leq 1.$$

18. 证明: 对任意正实数 a , 总有 $e^a \geq a^e$.

19. 设实数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in (\frac{1}{2}, 1]$, 证明:

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^n} \geq \frac{(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)}{(n - a_1 - a_2 - \cdots - a_n)^n}.$$

20. 设 $a, b, c > 0$, 证明: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$.