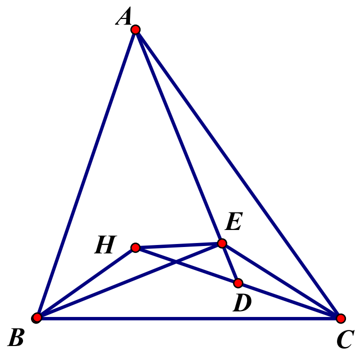
2023年江苏省数学夏令营讲座

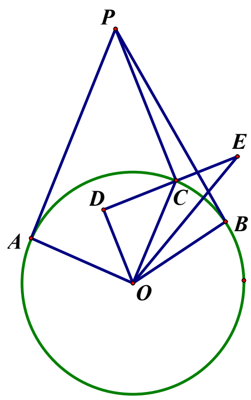
综合性的平面几何

南京外国语学校　　黄志军

1.如图,H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,D 为 CH 的中点,$BE\perp AD$ 于 E.
求证：B、C、E、H 四点共圆.

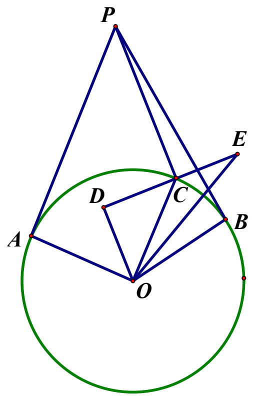


2.如图 PA, PB 分别切⊙O 于 A、B，C 为弧 AB 上一点，过 C 作 $DE\perp PC$，分别交∠AOC 和∠BOC 平分线于 D、E.求证：$CD=CE$

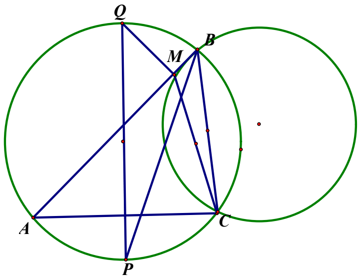


证明 1

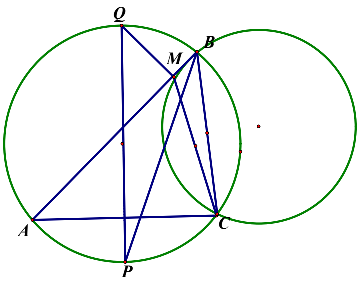
证明 2



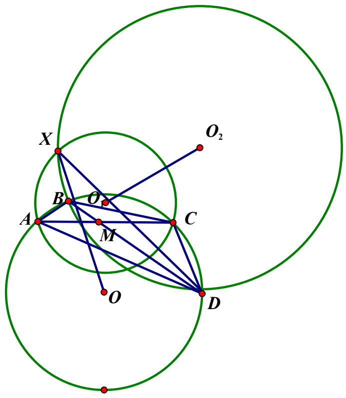
3.在锐角△*ABC* 中，已知 *AB*>*BC*，点 *P*、*Q* 分别为其外接圆⊙*O* 上的劣弧 *AC*、优弧 *AC* 的中点，过 *Q* 作线段 *AB* 的垂线，垂足为 *M*.
证明：△*BMC* 的外接圆平分线段 *BP*.
证明 1



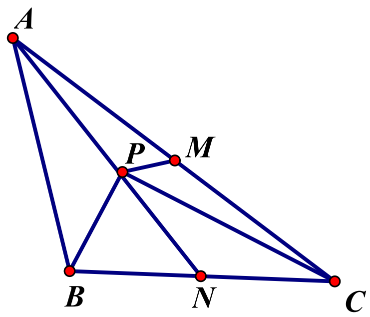
证明 2



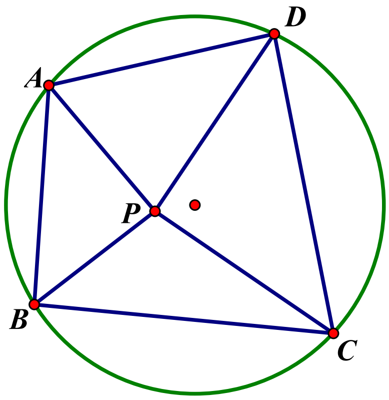
4.设四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,BD 平分 AC,$\angle ABC$ 的角平分线交$\angle ADC$ 的角平分线于点 X(X 不同于 B,D).求证:$\triangle XAC$,$\triangle XBD$ 的外心所在的直线平分线段 OX.



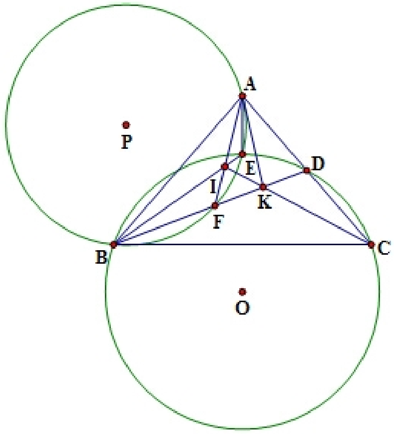
5.设 P 为△ABC 内一点，且满足∠BPC=90^0，∠BAP=∠BCP，M，N 分别是边 AC，BC 的中点．若 BP=$2PM$，证明：A，P，N 三点共线．



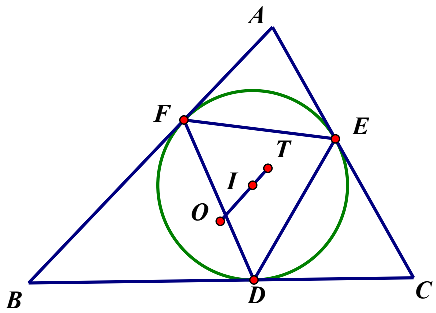
6.圆内接四边形 $ABCD$ 中存在一点 P，使得$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCD=\angle PDA$，证明：$AB\cdot CD=BC\cdot AD$



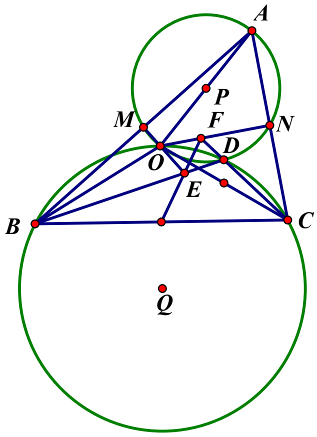
7.如图，等腰△*ABC* 中，*AB*=*AC*,*D* 为 *BC* 中点，作△*BCD* 的外接圆⊙*O* 交∠*BAC* 的平分线于点 *E*，作△*ABE* 的外接圆⊙*P* 交 *BD* 于 *F*,连接 *AF* 交 *BE* 于 *I*,连接 *CI* 交 *BD* 于 *K*，连接 *AK*，求证：点 *I* 为△*ABK* 内心



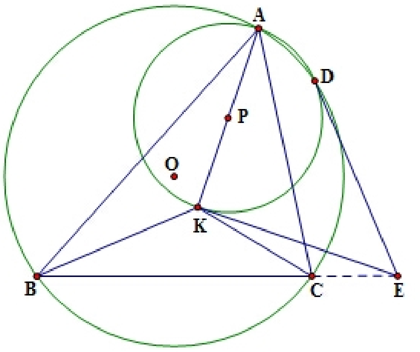
8.如图，$\triangle ABC$ 中，内切圆$\odot I$ 分别切 BC、CA、AB 于点 D、E、F,T 为$\triangle DEF$ 垂心，O 为$\triangle ABC$ 外心,证明：O、I、T 三点共线.



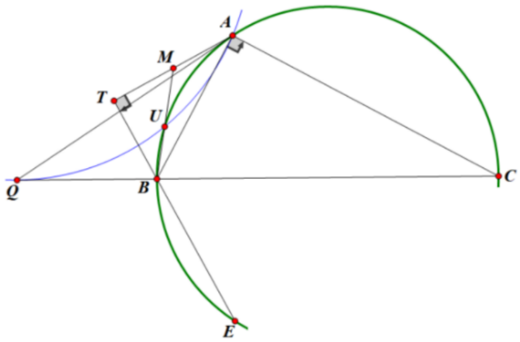
9.如图，O 为△ABC 外心，以 AO 为直径作⊙P，分别交于 AB,AC 点 M,N，作△BOC 的外接圆⊙Q 交⊙P 于 D，MO 交 BD 于 E，NO 交 CD 于 F，求证：直线 EF 平分线段 BC



10.如图，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，点 K 为$\triangle ABC$ 内一点，使得$\angle KBC=\angle KAB$,$\angle KCB=\angle KAC$,以 AK 为直径作$\odot P$ 交$\odot O$ 于另一点 D，$\odot P$ 在点 D,K 处的切线交于点 E，证明：点 E 在直线 BC 上

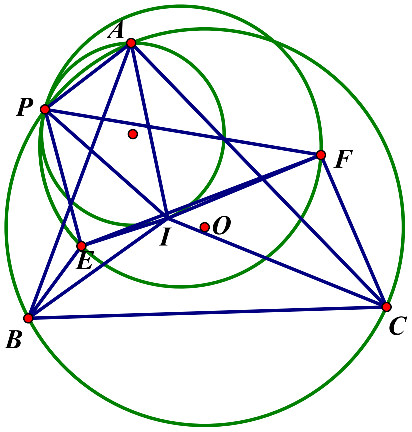


11. $\angle BAC=90°$,点 A 关于 BC 的对称点为 E，过 A 作 BE 的垂线 AT，M 为 AT 的中点，BM 再交⊙(ABC)于点 U，过 A 作⊙(ABC)的切线交 CB 于点 Q。求证：⊙(AUQ)和 BC 相切.



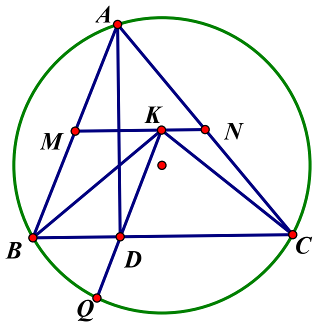
12. $\triangle ABC$ 内心为 I，点 P 为⊙(ABC)的弧 BAC 上任意一点，过点 I 作⊙(API)的切线，在切线上取两点 E、F，使得 $BE=EI$、$CF=FI$。

求证：⊙(PEF)和⊙(API)相切.

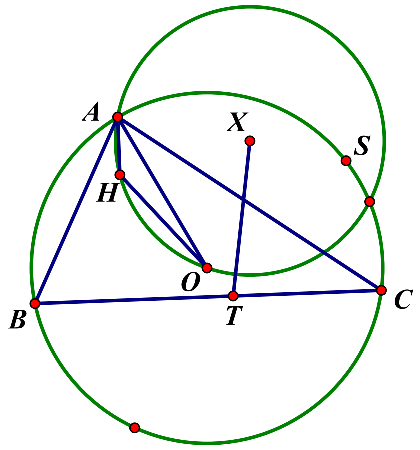


13.$\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，AD 为 BC 边上的高，M、N 分别为 AB、AC 的中点，K 为 MN 上一点满足 $KB=KC$,KD 交⊙(ABC)于点 Q。

求证：C、N、K、Q 四点共圆.



14. 在$\triangle ABC$中，$90° > \angle A > \angle B > \angle C$.设 O 和 H 分别为三角形的外心和垂心.直线 OH 和 BC 交于点 T，$\triangle AHO$ 的外心为点 X.求证：点 H 关于直线 XT 的对称点在$\triangle ABC$ 的外接圆上.



15. O、H 是不等腰$\triangle ABC$ 的外心和垂心，K 是$\triangle AOH$ 的垂心，P 是$\triangle BOC$ 的外心，AT 是$\odot O$ 的直径，点 S 在 BC 上，满足 $SO=SH$.求证：$KS\perp TP$.