

怎样准备强基计划数学测试

一、知识准备

二、剖析例题

三、动手练习

四、推荐参考书——

《全国重点大学强基计划数学教程》

主编：张天德、贾广素



第一章 集合与简易逻辑

1.1 代数式与方程

1.2 集合的概念与运算

1.3 容斥原理与抽屉原理

1.4 命题的形式

1.5 充分条件与必要条件

1.6 方程问题

习题一

第二章 不等式

2.1 不等式的性质

2.2 不等式的求解

2.3 不等式的证明

2.4 经典不等式

2.5 不等式的应用

习题二

第三章 函数

3.1 函数的概念与性质

3.2 基本初等函数

3.3 函数的值

3.4 函数的零点

3.5 简单的函数方程

3.6 二元函数方程

习题三

第四章 数列

4.1 数列

4.2 等差数列与等比数列

4.3 递推数列

4.4 数列求和与数学归纳法

4.5 数列的极限

习题四

第五章 微积分初步

5.1 函数的极限

5.2 导数的概念与几何意义

5.3 导数在研究函数中的应用

5.4 导数典型问题及处理策略

5.5 定积分

习题五

第六章 三角函数

6.1 三角比

6.2 三角公式(一)

6.3 三角公式(二)

6.4 正弦定理与余弦定理

6.5 三角恒等式与三角不等式

6.6 三角函数

6.7 三角比在代数中的应用

6.8 三角比在几何中的应用

习题六

第七章 平面向量与复数

7.1 平面向量的概念与运算

7.2 平面向量的应用

7.3 复数的概念与运算

7.4 复数的几何意义

7.5 复数方程及单位根

7.6 复数的指数形式及其应用

习题七

第八章 立体几何

8.1 空间几何体

8.2 空间直线与平面

8.3 空间中的位置关系

8.4 空间中的角度(一)

8.5 空间中的角度(二)

8.6 空间中的距离

8.7 空间向量

习题八

第九章 直线与圆

9.1 坐标平面上的直线

9.2 曲线与方程

9.3 圆

9.4 线性规划

习题九

第十章 圆锥曲线

10.1 椭圆

10.2 双曲线

10.3 抛物线

10.4 直线与圆锥曲线

10.5 平移与旋转

10.6 极坐标系与参数方程

习题十

第十一章 排列组合与二项式定理

11.1 两个计数原理

11.2 排列与组合

11.3 二项式定理

习题十一

第十二章 概率与统计

12.1 频率与概率

12.2 概率的加法公式与乘法公式

12.3 期望与方差

12.4 抽样与估计

习题十二

第十三章 平面几何

13.1 相似与全等

13.2 三角形

13.3 平面几何中的著名定理

13.4 圆与根轴

13.5 四点共圆

习题十三

第十四章 初等数论

14.1 整数

14.2 数论函数

14.3 同余

14.4 多项式

14.5 不定方程

习题十四

第十五章 组合数学

15.1 逻辑推理

15.2 存在性问题

15.3 组合构造

15.4 组合计数

参考答案 (另册)

第一章 集合与简易逻辑

§ 1.1 代数式与方程

§ 1.2 集合的概念与运算

§ 1.3 容斥原理与抽屉原理

§ 1.4 命题的形式

§ 1.5 充分条件与必要条件

§ 1.6 方程问题

例题选讲 + 习题

§ 1.1 例1 (2018上海交大) 记 $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^6$ 的小数部分为 t , 则 $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^6(1 - t)$ 的值为 _____.

§ 1.1 例2 (2016北大博雅) 若方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的根也是方程 $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ 的根, 则 $a + b - 2c =$ _____.

§ 1.1 例3 (2018北大) 已知实数 a, b, c 满足 $a \neq b$, 且 $a^2(b + c) = b^2(a + c) = 1$. 则 $c^2(a + b) - abc$ 的值为 _____.

§ 1.1 例4 (2021年清华丘成桐领军计划) 已知 a, b, c, d 都是正整数, 且 $a^3 = b^2$, $c^5 = d^4$, $c - a = 77$. 求 $d - b$.

§ 1.1 例9 (2018陕西预赛) 设正整数 $n > 100$. 求 $\sqrt{n^2 + 3n + 1}$ 的小数部分的前两位数。

§ 1.1 例12 (2016北大博雅) 已知三个不同的实数 x, y, z 满足

$$x^3 - 3x = y^3 - 3y = z^3 - 3z.$$

则 $x + y + z =$ _____.

§ 1.1 例13 (2018湖南预赛) 已知四次多项式

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$$

的四个零点中有两个零点的积为 -32 . 则实数 $k =$ _____.

§ 1.1 例14 (2016年北大) 已知实系数方程

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

的根都不是实数, 其中两个根的和为 $2 + i$, 另两个根的积为 $5 + 6i$. 则 $b =$ _____.

§ 1.1 例15 (2017清华领军) 设实数 a, b 满足

$$a^5 + b^5 + a + b = 0.$$

则 $a + b = 0$.

§ 1.2 例2 (2018北大)

设函数 $f(t) = t^2 + 2t$. 求点集

$$M = \{(x, y) \mid f(x) + f(y) \leq 2, f(x) \geq f(y)\}$$

所构成图形的面积。

§ 1.2 例10 (2018中国科大)

设集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 求满足条件 $f(f(x)) = x$ (对任何 $x \in S$ 成立) 的映射 $f: S \rightarrow S$ 的个数。

§ 1.4 例2 (2016北大博雅) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c . 判断下列每组正数是否一定构成三角形的三边长:

(1) $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$;

(2) a^2, b^2, c^2 ;

(3) $\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}$;

(4) $|a-b|+1, |b-c|+1, |c-a|+1$.

§ 1.4 例12 (2017北大博雅)

一群学生参加夏令营，每名同学至少参加了一个学科测试。已知有100名学生参加了数学考试，50名学生参加了物理考试，48名学生参加了化学考试。学生总数是只参加一门考试学生数的2倍，也是参加三门考试学生数的3倍。求参加夏令营的学生总数。

§ 1.5 例1 (2018北大)

已知 $\triangle ABC$ 不是直角三角形。则

$$\tan A + \tan B + \tan C > 0$$

是 $\triangle ABC$ 为锐角三角形的 _____

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 前三个答案都不对

§ 1.6 例1 (2016中国科大)

已知方程 $x^3 - 2ax + a^2 = 0$ 在开区间 $(0, 1)$ 上有解。求实数 a 的取值范围。

§ 1.6 例2 (2017中国科大)

求方程 $\frac{x}{10} = \sin x$ 的实数解的个数。

§ 1.6 例5 (2015北大夏令营)

已知 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个不同的根。求出所有有理数 a, b, c ，使得

$$x_1 = ax_2^2 + bx_2 + c.$$

§ 1.6 例7 (2021北大)

求出方程 $x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5 = 0$ 的所有整数解。

§ 1.6 例9 (2018中国科大)

设 a 为复数, i 为虚数单位。已知关于 x 的方程

$$x^2 + ax + i = 0$$

有实根。求 $|a|$ 的取值范围。

习题一3 (2016北大)

已知方程 $x^2 + ax + 1 = b$ 有两个不同的非零整数根。则 $a^2 + b^2$ 的值可能为 ()

- A. 素数 B. 2 的非负整数次幂
C. 3 的非零整数次幂 D. 以上答案都不对

习题一4 (2017清华领军)

已知方程 $x^2 + ax + b = 0$ 在开区间 $(-1, 1)$ 有两个零点。求 $a^2 - 2b$ 的取值范围。

习题一8 (2017北大博雅)

已知整数 p, q 满足 $p + q = 218$, 且 $x^2 + px + q = 0$ 有整数根。求这样的整数对 (p, q) 的个数。

习题一9 (2017清华)

已知实数 x, y 满足 $5x^2 - y^2 - 4xy = 5$. 求 $2x^2 + y^2$ 的最小值。

习题一12 (2017清华)

已知复数 x, y 满足

$$x + y = x^4 + y^4 = 1.$$

求 xy 的不同取值的个数。

习题一14 (2015北大博雅)

已知平面的点集

$$M = \{ (x, y) \mid \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \geq xy \}.$$

求平面区域 M 的面积。

习题一19 (2018中国科大)

求所有的实系数二次多项式 $f(x) = x^2 + ax + b$, 使得

$$f(x) \mid f(x^2).$$

第二章 不等式

§ 2.1 不等式的性质

§ 2.2 不等式的求解

§ 2.3 基本不等式

§ 2.4 不等式的证明

§ 2.5 不等式的应用

基础知识——基本不等式

关于正数的不等式——

排序不等式：正序乘积之和 $>$ 乱序乘积之和

如果 $a > b > 0$ 且 $x > y > 0$, 那么

$$ax + by > ay + bx.$$

算术-几何平均值不等式：算术平均 \geq 几何平均

$$\frac{a + b + c}{3} \geq (abc)^{1/3}$$

关于实数的不等式——

绝对值不等式：

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

等号成立当且仅当 $ab \geq 0$.

柯西不等式：

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

等号成立等且仅当数组 (a, b, c) 与 (x, y, z) 之间有倍数关系。

凸函数不等式： 对于严格凸函数 (例如 $f(x) = x^2$)，有

$$f\left(\frac{a + b + c}{3}\right) \geq \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3},$$

等号成立等且仅当 $a = b = c$.

例题、习题

§ 2.1 例3 (线性不等式组)

设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx$ 满足

$$1 \leq f(-1) \leq 2, \quad 2 \leq f(1) \leq 4.$$

求 $f(-2)$ 的取值范围。

§ 2.1 例4 (2018天津预赛)

已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 20$.

求 $xy + 8x + y$ 的最大值。

§ 2.1 例8 (2018北大)

已知实数 a, b, c 成等比数列, $c > 0$, 且 $a < 2b + 3c$.

求 $\frac{b-2c}{a}$ 的取值范围。

§ 2.2 例1 (2017上海交大)

求解不等式

$$1 + 2^x < 3^x.$$

§ 2.2 例2 (2018吉林预赛)

设 x, y, z 都是正实数, 满足

$$x + y = xy, \quad x + y + z = xyz.$$

求 z 的取值范围。

§ 2.2 例6 (2016中国科大)

设实数 a 满足: 对任意实数 x , 都有

$$|2x - a| + |3x - a| \geq a^2.$$

求 a 的取值范围。

预备知识: 设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. 则函数

$$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_n|$$

的最小值在中间数或中间区间上取得, 即:

- (1) 如果 $n = 2m + 1$ 为奇数, 则最小值在 $x = a_{m+1}$ 取得;
- (2) 如果 $n = 2m$ 为偶数, 则最小值在 $x \in [a_m, a_{m+1}]$ 取得。

§ 2.2 例7

已知 $a \geq 1$, 且对任意 $x \in [1, 2]$, 恒成立不等式

$$x|x - a| + \frac{3}{2} \geq a.$$

求 a 的取值范围。

§ 2.2 例8 (2017清华领军)

已知函数 (其中 m 为实数)

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + (2+m)x^2 - 2(1+2m)x + 4m - 1$$

对于所有实数 x 满足 $f(x) \geq 0$.

求 m 的取值范围。

§ 2.3 例3 (2017北大冬令营)

试证明 $\triangle ABC$ 的内角满足不等式

$$\cos A + \cos B + \cos C > 1.$$

注意：当 $A \rightarrow 0$, $B \rightarrow 0$, $C \rightarrow \pi$ 时,

$$\cos A + \cos B + \cos C \rightarrow 1.$$

§ 2.3 例6 (2017山东大学)

已知实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_{n+1} = \frac{n(a_n - 1)}{n - a_n}$.

(1) 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} < \frac{7}{6}$.

§ 2.3 例7 (2017清华大学THUSSAT)

已知 a, b, c 均为正数。

求代数式 $\frac{a}{b+3c} + \frac{b}{8c+4a} + \frac{9c}{3a+2b}$ 的最小值:

§ 2.3 例8 (2015清华大学)

设非负实数 x, y 满足 $2x + y = 1$.

求 $x + \sqrt{x^2 + y^2}$ 的最小值和最大值。

§ 2.3 例9 (2017北大夏令营)

已知正数 a, b, c 满足 $abc = \frac{1}{2}$.

求证 $\frac{ab^2}{a^3 + 1} + \frac{bc^2}{b^3 + 1} + \frac{ca^2}{c^3 + 1} \geq 1$.

§ 2.4 例2 (2018中国科大)

设 $x > -\frac{1}{2}$.

求 $f(x) = x^2 + x + \frac{4}{2x + 1}$ 的最小值。

§ 2.4 例3 (2018北大博雅)

设 a, b, c 是非负实数, 满足 $a + b + c = 3$.

求 $a + ab + abc$ 的最大值。

§ 2.4 例7 (2018清华大学)

已知非负实数 x, y, z 满足

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2z = 3.$$

求 $5x + 4y + 3z$ 的最小值与最大值。