怎样准备强基计划数学测试

一、知识准备

二、剖析例题

三、动手练习

四、推荐参考书——

《全国重点大学强基计划数学教程》

主编：张天德、贾广素

第一章　集合与简易逻辑

例题选讲 + 习题

§ 1.1 **例1** (2018上海交大) 记 $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6$ 的小数部分为 t，则 $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6(1-t)$ 的值为 ____________.

§ 1.1 **例2** (2016北大博雅) 若方程 $x^2-3x-1=0$ 的根也是方程 $x^4+ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $a+b-2c=$ ____________.

§ 1.1 **例3** (2018北大) 已知实数 a,b,c 满足 $a\neq b$，且 $a^2(b+c) = b^2(a+c)=1$. 则 $c^2(a+b)-abc$ 的值为 ____________.

§ 1.1 **例4** (2021年清华丘成桐领军计划) 已知 a,b,c,d 都是正整数，且 $a^3=b^2$，$c^5=d^4$，$c-a=77$. 求 $d-b$.

§ 1.1 **例9** (2018陕西预赛) 设正整数 $n>100$. 求 $\sqrt{n^2+3n+1}$ 的小数部分的前两位数。

§ 1.1 **例12** (2016北大博雅) 已知三个不同的实数 x,y,z 满足

$$x^3-3x=y^3-3y=z^3-3z.$$

则 $x+y+z=$ ____________.

§ 1.1 **例13** (2018湖南预赛) 已知四次多项式

$$x^4-18x^3+kx^2+200x-1984$$

的四个零点中有两个零点的积为 -32. 则实数 $k=$ ______.

§1.1 **例14** (2016年北大)　已知实系数方程

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

的根都不是实数，其中两个根的和为 $2+i$，另两个根的积为 $5+6i$. 则 $b=$ ________.

§1.1 **例15** (2017清华领军)　设实数 a,b 满足

$$a^5+b^5+a+b=0.$$

则 $a+b=0$.

§1.2 **例2** (2018北大)

设函数 $f(t)=t^2+2t$. 求点集

$$M=\{(x,y)\mid f(x)\ +\ f(y)\le 2, f(x)\ge f(y)\}$$

所构成图形的面积。

§1.2 **例10** (2018中国科大)

设集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$. 求满足条件 $f\big(f(x)\big)=x$ (对任何 $x\in S$ 成立) 的映射 $f:S\to S$ 的个数。

§1.4 **例2** (2016北大博雅)　已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a,b,c. 判断下列每组正数是否一定构成三角形的三边长：

(1) $\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}$;

(2) $a^2,\ b^2,\ c^2$;

(3) $\dfrac{b+c}{2},\dfrac{c+a}{2},\dfrac{a+b}{2}$;

(4) $|a-b|+1,\ |b-c|+1,\ |c-a|+1.$

§1.4 **例12** (2017北大博雅)

一群学生参加夏令营，每名同学至少参加了一个学科测试。已知有100名学生参加了数学考试，50名学生参加了物理考试，48名学生参加了化学考试。学生总数是只参加一门考试学生数的2倍，也是参加三门考试学生数的3倍。求参加夏令营的学生总数。

§1.5 **例1** (2018北大)

已知 $\triangle ABC$ 不是直角三角形。则

$$\tan A+\tan B+\tan C>0$$

是 $\triangle ABC$ 为锐角三角形的 ________

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．前三个答案都不对

§1.6 **例1** (2016中国科大)

已知方程 $x^3-2ax+a^2=0$ 在开区间 $(0,1)$ 上有解。求实数 a 的取值范围。

§1.6 **例2** (2017中国科大)

求方程 $\dfrac{x}{10}=\sin x$ 的实数解的个数。

§1.6 **例5** (2015北大夏令营)

已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两个不同的根。求出所有有理数 a,b,c，使得

$$x_1=ax_2^2+bx_2+c.$$

§1.6 **例7** (2021北大)

求出方程 $x^2—2xy+3y^2-4x+5=0$ 的所有整数解。

§1.6 **例9** (2018中国科大)

设 a 为复数，i 为虚数单位。已知关于 x 的方程

$$x^2+ax+i=0$$

有实根。求 $|a|$ 的取值范围。

习题一3 (2016北大)

已知方程 $x^2+ax+1=b$ 有两个不同的非零整数根。则 a^2+b^2 的值可能为 (　　　)

A. 素数　　　　　　**B**. 2 的非负整数次幂

C. 3 的非零整数次幂　　　　**D**. 以上答案都不对

习题一4 (2017清华领军)

已知方程 $x^2+ax+b=0$ 在开区间 $(-1,1)$ 有两个零点。求 a^2-2b 的取值范围。

习题一8 (2017北大博雅)

已知整数 p,q 满足 $p+q=218$，且 $x^2+px+q=0$ 有整数根。求这样的整数对 (p,q) 的个数。

习题一9 (2017清华)

已知实数 x,y 满足 $5x^2-y^2-4xy=5$. 求 $2x^2+y^2$ 的最小值。

习题一12 (2017清华)

已知复数 x, y 满足

$$x + y = x^4 + y^4 = 1.$$

求 xy 的不同取值的个数。

习题一14 (2015北大博雅)

已知平面的点集

$$M = \{\,(x, y) \mid \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} \geq xy\,\}.$$

求平面区域 M 的面积。

习题一19 (2018中国科大)

求所有的实系数二次多项式 $f(x) = x^2 + ax + b$，使得

$$f(x) \mid f(x^2).$$

第二章　不等式

基础知识——基本不等式

关于正数的不等式——

排序不等式：正序乘积之和 $>$ 乱序乘积之和

如果 $a>b>0$ 且 $x>y>0$，那么

$$ax+by>ay+bx.$$

算术-几何平均值不等式：算术平均 $\geq$ 几何平均

$$\frac{a+b+c}{3}\geq(abc)^{1/3}$$

关于实数的不等式——

绝对值不等式：

$$|a+b| \leq |a|+|b|,$$

等号成立当且仅当 $ab \geq 0.$

柯西不等式：

$$(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2),$$

等号成立等且仅当数组 (a,b,c) 与 (x,y,z) 之间有倍数关系。

凸函数不等式：对于严格凸函数 (例如 $f(x)=x^2$)，有

$$f\Big(\frac{a+b+c}{3}\Big) \geq \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3},$$

等号成立等且仅当 $a=b=c.$

例题、习题

---

§ 2.1 **例3** (线性不等式组)

设二次函数 $f(x)=ax^2+bx$ 满足

$$1\le f(-1)\le 2,\quad 2\le f(1)\le 4.$$

求 $f(-2)$ 的取值范围。

§ 2.1 **例4** (**2018天津预赛**)

已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2=20.$

求 $xy+8x+y$ 的最大值。

§ 2.1 **例8** (**2018北大**)

已知实数 a,b,c 成等比数列，$c>0$，且 $a<2b+3c.$

求 $\dfrac{b-2c}{a}$ 的取值范围。

§ 2.2 **例1** (**2017上海交大**)

求解不等式

$$1+2^x<3^x.$$

§2.2 **例2** (**2018吉林预赛**)

设 x, y, z 都是正实数，满足

$$x + y = xy, \quad x + y + z = xyz.$$

求 z 的取值范围。

§2.2 **例6** (**2016中国科大**)

设实数 a 满足：对任意实数 x，都有

$$|2x - a| + |3x - a| \geq a^2.$$

求 a 的取值范围。

预备知识：设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. 则函数

$$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_n|$$

的最小值在中间数或中间区间上取得，即：

(1) 如果 $n = 2m + 1$ 为奇数，则最小值在 $x = a_{m+1}$ 取得；

(2) 如果 $n = 2m$ 为奇数，则最小值在 $x \in [a_m, a_{m+1}]$ 取得。

§2.2 **例7**

已知 $a \geq 1$，且对任意 $x \in [1, 2]$，恒成立不等式

$$x|x - a| + \frac{3}{2} \geq a.$$

求 a 的取值范围。

§2.2 **例8** (**2017清华领军**)

已知函数 (其中 m 为实数)

$$f(x)=x^4-2x^3+(2+m)x^2-2(1+2m)x+4m-1$$

对于所有实数 x 满足 $f(x)\geq 0.$

求 m 的取值范围。

§2.3 **例3** (**2017北大冬令营**)

试证明 $\triangle ABC$ 的内角满足不等式

$$\cos A+\cos B+\cos C>1.$$

注意：当 $A\to 0$，$B\to 0$，$C\to\pi$ 时，

$$\cos A+\cos B+\cos C\to 1.$$

§2.3 **例6** (2017山东大学)

已知实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{n(a_n-1)}{n-a_n}.$

(1) 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2}<\frac{7}{6}.$

§2.3 **例7** (2017清华大学THUSSAT)

已知 a,b,c 均为正数。

求代数式 $\dfrac{a}{b+3c}+\dfrac{b}{8c+4a}+\dfrac{9c}{3a+2b}$ 的最小值：

§2.3 **例8** (2015清华大学)

设非负实数 x, y 满足 $2x+y=1$.

求 $x+\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值和最大值。

§2.3 **例9** (2017北大夏令营)

已知正数 a, b, c 满足 $abc=\dfrac{1}{2}$.

求证 $\dfrac{ab^2}{a^3+1}+\dfrac{bc^2}{b^3+1}+\dfrac{ca^2}{c^3+1}\geq 1$.

§2.4 **例2** (2018中国科大)

设 $x>-\frac{1}{2}$.

求 $f(x)=x^2+x+\dfrac{4}{2x+1}$ 的最小值。

§2.4 **例3** (**2018北大博雅**)

设 a, b, c 是非负实数，满足 $a+b+c=3$.

求 $a+ab+abc$ 的最大值。

§2.4 **例7** (**2018清华大学**)

已知非负实数 x, y, z 满足

$$4x^2+4y^2+z^2+2z=3.$$

求 $5x+4y+3z$ 的最小值与最大值。