方程问题(试题选讲)

引例——香港中文大学综合评价试题 4：

已知$\dfrac{x}{\sin^2 72°+2024}+\dfrac{y}{\sin^2 72°-2023}=1$，$\dfrac{x}{\sin^2 18°+2024}+\dfrac{y}{\sin^2 18°-2023}=1$，求 $x+y$ 的值.

分析：这是个二元一次方程组，sin18°的值其实不难求出．分母复杂但只是系数．

常规的解法可以把系数“整式”化：

——吴康老师的构造方法.

新题： 已知$(a,\ b,\ c)=(2\cos\dfrac{2\pi}{7},\ 2\cos\dfrac{4\pi}{7},\ 2\cos\dfrac{6\pi}{7})$，

且 $\dfrac{x}{a^2+4}+\dfrac{y}{a^2-3}+\dfrac{z}{a^2+2}=1$，$\dfrac{x}{b^2+4}+\dfrac{y}{b^2-3}+\dfrac{z}{b^2+2}=1$，$\dfrac{x}{c^2+4}+\dfrac{y}{c^2-3}+\dfrac{z}{c^2+2}=1$，

求 $x+y+z$ 的值.

——题根：美国中学生数学邀请赛

已知：$\dfrac{x^2}{2^2-1^2}+\dfrac{y^2}{2^2-3^2}+\dfrac{z^2}{2^2-5^2}+\dfrac{w^2}{2^2-7^2}=1$，$\dfrac{x^2}{4^2-1^2}+\dfrac{y^2}{4^2-3^2}+\dfrac{z^2}{4^2-5^2}+\dfrac{w^2}{4^2-7^2}=1$，

$\dfrac{x^2}{6^2-1^2}+\dfrac{y^2}{6^2-3^2}+\dfrac{z^2}{6^2-5^2}+\dfrac{w^2}{6^2-7^2}=1$，$\dfrac{x^2}{8^2-1^2}+\dfrac{y^2}{8^2-3^2}+\dfrac{z^2}{8^2-5^2}+\dfrac{w^2}{8^2-7^2}=1$，

求 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 的值.

初中的方程体系：整式方程，分式方程，根式方程，二元三元方程，含绝对值方程.

进入高中的方程：次数高，三次四次的多项式方程，根与系数关系复杂.

新函数元素——新的同解变形，更复杂的系数表示.

数域扩充——系统完整——(代数基本定理，韦达定理等).

方程问题：

①函数思想，函数与同解变形，②复数域方程(包括基本定理)，③数列中的方程题.

一、函数方法

1．已知实数 a，b 满足等式 $a^3-3a^2+5a-4=0$，$b^3-3b^2+5b-2=0$．则 $a+b$ 的值为______．

2．若集合 $\{x \mid 4x|x|-a|x|=1\}$ 恰有 3 个元素，则 a 的取值范围是_________．

3．解方程 $\sqrt{13-\sqrt{13+x}}=x$．

4．解方程 $\log_{14}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x})=\log_2(\sqrt[6]{x})$．

5．设 a，$b>0$，满足：$\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+a|}=b$ 恰有三个不同的实数解 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3=b$，则 $a+b$ 的值为______．(联赛 2020——换元、几何)

6．若实数 x，y 满足 $2^x+4x+12=\log_2(y-1)^3+3y+12=0$，则 $x+y=$______．

二、方程中的对数、三角运算

1．若实数 x 满足 $\log_2 x=\log_4(2x)+\log_8(4x)$，则 $x=$________．

2．甲，乙两人解关于 x 的方程 $\log_2 x+b+c\log_x 2=0$．甲写错了常数 b 得到的根为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，乙写错了常数 c 得到的根为$\frac{1}{2}$，64．则该方程较小的根是_________．

3．设函数 $f(x)=|2-\log_3 x|$，正实数 a，b，c 满足 $a<b<c$，且 $f(a)=2f(b)=2f(c)$．求$\frac{ac}{b}$的值．

4．设实数 $t\in[0,\pi]$，若关于 x 的方程 $\cos(x+t)=1-\cos x$ 有解，求 t 的取值范围．

5．关于 x 的方程 $2^{|2x-2|}-a\cos(1-x)=0$ 只有一个实数解，求 a 的值．

6．设 α，β 为方程 $3x^2-2tx-3=0(t\in\mathrm{R})$的两个不等实根，函数 $f(x)=\frac{3x-t}{x^2+1}$的定义域为$[\alpha,\beta]$，$g(t)=\max\{f(x)\}-\min\{f(x)\}$．

证明：对于 $u_i\in(0,\frac{\pi}{2})(i=1,2,\cdots,n)$，若$\sum\sin u_i=1$，则$\sum\frac{1}{g(3\tan u_i)}\leqslant\frac{\sqrt{n^2-1}}{3}$.

三、复数域的方程

1．设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbb{Z})$满足 $z^3=2+11\mathrm{i}$，则 $a+b=$______.

2．已知方程 $x^{10}+(13x-1)^{10}=0$ 有 5 对共轭复数根 z_i，$\overline{z_i}$，$i\in\{1，2，3，4，5\}$．求$\sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{1}{|z_i|^2}$.

2-1．已知方程 $x^{2020}+(x-1)^{2020}=0$ 有 2020 个复数根 r_i，$\overline{r_i}$，$(i=1，2，\cdots，1010)$，$\overline{r_i}$为 r_i 的共轭复数．求$\sum\limits_{i=1}^{1010}\dfrac{1}{r_i\cdot\overline{r_i}}$.

3．若二次实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个虚根 x_1，x_2，满足$\dfrac{x_1^2}{x_2}$为实数，则$\sum\limits_{k=0}^{2021}(\dfrac{x_1}{x_2})^k=$______.

4．若二次实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个虚根 x_1，x_2，且 $x_1^3\in\mathbb{R}$，则$\dfrac{ac}{b^2}=$______.

5．已知方程 $x^2+(4+\mathrm{i})x+4+a\mathrm{i}=0(a\in\mathbb{R})$有实数根．则复数 $z=a+b\mathrm{i}=$______.

6．设正整数 $n>3$，z 为 $x^n-x^2-1=0$ 的任意一个复数根．证明：$2\mathrm{Re}(z^2-\dfrac{1}{z^2})\geqslant\dfrac{1}{|z|^4}-1$.

四、韦达定理

1．已知实数 m 满足：当关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根时，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant ma^2$ 总成立，则 m 的最大值为_______.

2．方程 $x^3-9x^2+8x+2=0$ 有 3 个实根 p，q，r，则$\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}=$_______.

3．若 $\alpha\beta\neq0$，x_1，x_2，x_3 为多项式 $\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta=0$ 的根，则$(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})=$______.

4．设r为$x^3-x+3=0$的解，则以r^2为其解的首项系数为1的整系数一元三次方程为_____.

5．若方程$x^3-x^2-x-1=0$的根为a，b，c．证明：$\frac{a^n-b^n}{a-b}+\frac{b^n-c^n}{b-c}+\frac{c^n-a^n}{c-a}$为整数.

6．设 a，b 为实数，函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$．若存在三个实数 x_1，x_2，x_3 满足 $x_1+1\leqslant x_2\leqslant x_3-1$，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，求$|a|+2|b|$的最小值．(2021 年 A_2)

五、方程与数列

1．设数列$\{a_n\}$的相邻两项a_n与a_{n+1}为方程$x^2-3nx+c_n=0(n=1，2，3，\cdots)$的两个根，当$a_1=1$时，求$c_n$．

2．设$f_1(x)=\sqrt{x^2+32}$，$f_{n+1}(x)=\sqrt{x^2+\frac{16}{3}f_n(x)}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

若对于每个n都有$f_n(x)=3x$，求x的集合．(浙江 2017)

3．已知二次函数$f(x)=x^2+ax+b(a，b，\mathrm{R})$有两个不同的零点．若$f(x^2+2x-1)=0$有四个不同的实数根$x_1<x_2<x_3<x_4$，且$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$成等差数列，求$a-b$的取值范围．

4．小明同学任选一个各项均为非零整数的等差数列$\{a_n\}$，随后列出2020个关于x的一元二次方程：E_i：$a_{i+2}x^2+a_{i+1}x+a_i=0(i=1，2，3，\cdots，2020)$，再将上述每个方程的根都写在黑板上．求此时黑板上两两不同的实根的个数的最大可能值．

5．设实数a，b，x，y满足方程组$\begin{cases}ax+by=3,\\ax^2+by^2=7,\\ax^3+by^3=16,\\ax^4+by^4=42.\end{cases}$求$ax^5+by^5$的值．

6．若方程$x^3-x^2-x-1=0$的根为a，b，c．证明：$\frac{a^n-b^n}{a-b}+\frac{b^n-c^n}{b-c}+\frac{c^n-a^n}{c-a}$为整数．

六、解方程中的小“技巧”

——启东中学曹瑞彬老师语录：数学中的运算技巧是数学学习的“润滑油”.

1．方程 $x^4-4x^3-x^2-8x+4=0$ 的解集为________.

2．已知三次函数 $f(x)=4x^3+ax^2+bx+c(a，b，c\in\mathrm{R})$满足当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$．则 $a=$______，$b=$______，$c=$______.

3．设实系数方程 $x^6+(a+1)x^5+(3+a)x^4+(a+b+2)x^3+(3+b)x^2+(1+b)x+1=0$ 有实根，则 a^2+b^2 的最小值为__________.

4．解方程$\sqrt{2x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{5x^2+3x+7}$．(贵州 2021——整体换元)

5．已知方程 $x^2-3x-1=0$ 的根也是方程 $x^4+ax^2+bx+c=0$ 的根.

则 $a+b-2c$ 的值是__________．(博雅计划 5)

6．给定次数 $n>5$ 的整系数多项式 $P(x)$，有 n 个不同的整数根，

证明：多项式 $P(x)+3$ 有 n 个不同的实根.

方程思考题

1．若 $x^2\ln x+x\ln^2x-\ln^2x-x^2-x\ln x+2\ln x=1$，则 $x=$________．

2．若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+c$ 在区间$(-1，2)$上有三个零点，

求 $f(-1)\cdot f(2)$ 的取值范围．——联赛 2020

3．设 a，$b\in\mathrm{R}$． 若关于 z 的方程$(z^2+az+b)(z^2+az+2b)=0$ 有 4 个互不相等的复数根 z_1，z_2，z_3，z_4，且它们在复平面上对应的点恰是一个边长为 1 的正方形的四个顶点．

求 $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ 的值．——联赛 21 年．

4．已知 2011 个实数 x_1，x_2，…，x_{2011} 满足方程组 $\sum\limits_{k=1}^{2011}\frac{x_k}{n+1}=\frac{1}{2n+1}$，$n=1$，2，…，2011．

试计算 $\sum\limits_{k=1}^{2011}\frac{x_k}{2k+1}$的值．

5．求证：对任意实数 a_3，a_4，…，a_{85}，方程 $a_{85}x^{85}+a_{84}x^{84}+\cdots+a_3x^3+3x^2+2x+1=0$ 的根不全为实数．

6．设多项式 $f(x)=x^{2020}+17x^{2019}+1$ 的零点为 r_1，r_2，r_3，…，r_{2020}．另有次数为 2020 的多项式 $P(x)$满足 $P(x_i+\frac{1}{x_i})=0$，$i=1$，2，…2020．求$\frac{P(1)}{P(-1)}$的值．