2023年江苏省数学夏令营—组合综合—题目

【例 1】一个集族 F 叫作“完美的”如果对任何三个集合 $X_1,X_2,X_3\in F$，集合 $(X_1\setminus X_2)\bigcap X_3$ 和 $(X_2\setminus X_1)\bigcap X_3$ 中至少有一个是空集.证明：若 F 是一个有限集 U 的完美子集族，则 $|F|\le|U|+1$.

【例 2】设 A 是一个 225 元集，$A_1,A_2,\cdots,A_{11}$ 为 A 的 11 个 45 元子集，满足对任意的 $1\le i<j\le 11$，$|A_i\bigcap A_j|=9$.证明：$|A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_{11}|\ge 165$，并给出一个例子使等号成立.

【例 3，2015-高中联赛】设 $S=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个互不相同的有限集合 $(n\ge 2)$，满足对任意的 $A_i,A_j\in S$，均有 $A_i\bigcup A_j\in S$，若 $k=\min\limits_{1\le i\le n}|A_i|\ge 2$，证明：存在 $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，使得 x 属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的至少 $\dfrac{n}{k}$ 个集合.

【例 4】设 n 是给定的正整数，集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$.对非空的有限实数集合 A 和 B，求 $|A\Delta S|+|B\Delta S|+|C\Delta S|$ 的最小值，其中 $C=A+B=\{a+b\,|\,a\in A,b\in B\}$，$X\Delta Y=\{x\,|\,x$ 恰好属于 X 和 Y 中的一个$\}$，$|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

【例 5，Sperner 定理】设 I 为 n 元集，$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为 I 的子集，且互不包含，则 m 的最大值为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

【例 6】11 个歌唱演员参加联欢节，每天有一些演员演出，其余的演员在台下观看，联欢节结束时，每个演员都至少以观众身份看过其他演员的一次演出.问此联欢节至少持续了多少天?

【例 7】$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个绝对值不小于 1 的实数，从 2^n 个和

$$x_A=\sum_{i\in A}x_i\text{，}\quad A\subset X=\{1,2,\cdots,n\}$$

（约定 $x_\phi=0$）中至多能选出多少个，使得每两个被选出的和相差不到 1？

【例 8，Erdos-Szekeres 定理】任意给定一个 $mn+1$ 项的实数数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_{mn+1}, \qquad ①$$

证明可以从中选出 $m+1$ 项（依①中顺序）单调递增，或者可以从中选出 $n+1$ 项（依①中顺序）单调递减.

【例 9】设 X 是 100 元集合，求具有下述性质的最小正整数 n：对于任意由 X 的子集构成的长度为 n 的序列

$$A_1,A_2,\cdots,A_n,$$

存在 $1\le i<j<k\le n$，满足

$$A_i\subseteq A_j\subseteq A_k \text{ 或 } A_i\supseteq A_j\supseteq A_k.$$

【例 10】在一次演讲中，有 5 位数学家每人均打两次盹，并且每两人均有同时在打盹的时刻. 证明：一定有三个人，他们有同时打盹的时刻.

【例 11】对一个有限图可以进行如下操作：选择任意一个长度为 4 的圈，任意选择这个圈中的一条边，并将其从图中删掉．对于固定的整数 n（$n\ge 4$），若将 n 个顶点的完全图进行如上的操作，求所得图的边数的最小值.

【例 12】设 G 是 n 阶简单图，且 G 中不含四边形，则其边数

$$e\le\frac{1}{4}n(1+\sqrt{4n-3}).$$

【例 13】一个国家有 n（$n>2$）个城市和两家航空公司，每两个城市之间均恰有一条双向航线，该双向航线由某家航空公司独家运营.一位女数学家想从某个城市出发，经过至少 2 个其他城市（每个途经城市仅经过一次），最后回到出发城市.她发现，无论如何选择出发城市与途经城

市，她均无法仅乘坐一家航空公司的航班.求n的最大值.

【例 14】已知n为正偶数，图G中有n个点，$\frac{n^2}{4}$条边，且没有环和重边（任意两个点之间要么连一条边，要么无边相连）.由两个不同的点构成的无序点对(x,y)，若它们与同一个点相邻（存在一个点z，使得xz和yz均为边），则称点对(x,y)为“友好的”，证明：图G中至少有$2C_{\frac{n}{2}}^2$个友好的无序点对。

【例 15】某校有 2021 位同学，其中每一位同学恰有k个朋友（朋友关系是相互的）。已知不存在三位同学，使得他们两两之间互为朋友关系。求k的最大值。

【例 16】集合$S_1,S_2,\cdots,S_n$两两不同，且满足下列条件：

（1）$|S_i\cup S_j|\le 2004$（$1\le i,j\le n$，$i,j\in N^+$）；

（2）$S_i\cup S_j\cup S_k=\{1,2,\cdots,2008\}$（$1\le i<j<k\le n$，$i,j,k\in N^+$）.

求n的最大可能值.

【例 17】一位老师和他的 30 个学生在一个无限单元网格上进行如下游戏：从老师开始，接着 30 个学生各进行一次操作，然后又轮到老师，已知这样进行下去，每个人在一次操作中可以在网格中选取一条单元边（即两个相邻单元的公共边）进行染色，每条边不能重复染色，如果在若干次操作后，网格上存在一个1×2或2×1矩形，其整个边框都被染色，但内部的一条单元边未被染色，则老师获胜，求证：老师有获胜的策略。

【例 18】n个正整数写成一行，爱丽丝选两个相邻的数x、y（$x>y$，且x在y的左边）.她用数对$(y+1,x)$或$(x-1,x)$来代替(x,y).证明：爱丽丝只能进行有限次上述操作.

【例 19】一开始，黑板上写着数对$(1,1)$。对于某两个数x和y，如果黑板上已经写出数对$(x,y-1)$和数对$(x+y,y+1)$之一，那么就可以写出它们中的另一个。同样的，如果黑板上已经

写出数对(x,xy)与数对$(\frac{1}{x},y)$之一，那么也可以写出它们中的另一个。

证明：在所写出的每一个数对中的第一个数都一定是正数。

【例 20】设正整数$n\geq 2$是偶数.黑板上写有n个实数，每次操作可以任意擦去两个数$a,b,$再写上这两个数的乘积ab,ab.证明：不论初始时黑板上写有哪些实数，总可以经过有限次操作，使得黑板上的n个数全相等.

【例 21】已知n为给定的正整数，西西弗斯对于排成一排且从左到右标号为$0,1,\cdots,n$的$n+1$个方格进行一系列的操作：开始时，在标号为 0 的方格内有n粒石子，其他方格内没有石子。每次操作，西西弗斯选择任意非空的方格（设这个方格内有k粒石子），他从中选取一粒石子并将这粒石子向右最多移动k个单位后放入某个方格内（不能放到方格的外部），西西弗斯的目标是将所有n粒石子均移动到标号为n的方格。证明：西西弗斯用少于$\left\lceil\frac{n}{1}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\cdots+\left\lceil\frac{n}{n}\right\rceil$次操作不能达到目标。

【例 22】令S表示平面上满足$x^2+y^2\leq 10^{10}$的所有整点(x,y)组成的集合，甲、乙两人（由甲开始）轮流依次指定S中的两不同的点$A_1,A_2,A_3,\cdots$满足：A_i与A_{i+1}关于原点不对称，$A_iA_{i+1}<A_{i+1}A_{i+2}$。一个人如果轮到他时，已无点可以指定，则称他失败．问：甲、乙两人谁有必胜策略？

【例 23】某社交网络上有 2019 个用户，某些用户之间是朋友关系.只要用户A是用户B的朋友，则B也是A的朋友.如下形式的操作可反复进行，每一时刻只进行一个操作：三个用户A、B、C满足A与B、C 均为朋友，但B与C不是朋友，则同时改变他们之间的朋友关系，即B与C变为朋友，但A与B不再是朋友，A与C也不再是朋友.所有其他的朋友关系不改变。设最初时有 1010 个用户每人拥有 1009 个朋友，有 1009 个用户每人拥有 1010 个朋友.证明：存在一个操作序列，使得操作结束后，每个用户至多只有一个朋友.

【例 24】一名 IMO 代表队的领队选择正整数n、k（$n>k$），并告知了副领队和参赛者。然后，领队秘密地告诉副领队一个有n个数码的二进制表示的数字串，于是，副领队写下与领队写的n个数码的数字串恰有k个数位上的数不同的所有n个数码的二进制表示的数字串（若$n=3$，$k=1$，且领队选了 101 告诉了副领队，则副领队应该写出 001、111、100）。参赛者允许看副领队写的数字串，并去猜领队写的数字串。求猜的次数的最小值（依赖于n、k），保证得到正确的答案。

【例 25】一个古老部落的人用一种仅由字母A、B构成的单词交流。研究人员发现，任意两个等长的单词至少有 3 处字母不同，例如，$ABBAA$和$AAAAB$在第 2、3、5 个位置字母不同。对于任意正整数$n\geq 3$，证明：这种语言不可能含有超过$[\frac{2^n}{n+1}]$个长度为n的单词。

【例 26】科学院中 999 名院士讨论若干科学问题.对于每个问题，恰有三名院士有兴趣.每两名院士恰有一个问题他们都有兴趣.证明存在 250 个科学问题使得每名院士对其中至多一个问题有兴趣.

【例 27，2021-全国联赛-A1】圆周上给定 100 个不同的点。试确定最大的正整数k：将这 100 个点中任意k个点任意染为红、蓝两色之一，均可将其余的点适当地染为红色或蓝色，使得可用这 100 个点为端点作 50 条线段，任意两条线段没有公共点，且每条线段的端点同色。

【例 28】在平面上任给$2n$个点，其中任意三点不共线，并把其中n个点染成红色，n个点染成蓝色．求证：可以一红一蓝地把它们连成n条线段，使这些线段互不相交．

【例 29】设平面上n（$n\geq 4$）个点的集合M满足任意三点不共线.开始时，这些点被n条线段相连，使得集合M中的每个点恰为两条线段的端点.每一次操作选择两条有公共内点的线段AB、CD，此时，若AC与BD均没有出现，则用AC、BD依次代替AB、CD.证明：操作的次数小于$\frac{n^3}{4}$.

【例 30】在一个999×999的方格表中，一些方格是白色的，其他均是红色的.设T是由三个方格C_1、C_2、C_3组成的方格组(C_1,C_2,C_3)的个数，使得方格C_1、C_2在同一行，方格C_2、C_3在同一列，且方格C_1、C_3是白色的，方格C_2是红色的.求T的最大值.