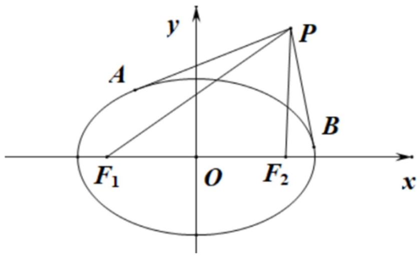
2023年江苏省数学竞赛夏令营讲义——解析几何

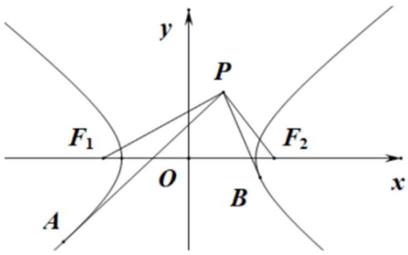
第一部分 几个解析几何问题的几何背景

1、彭赛列小定理与彭赛列大定理

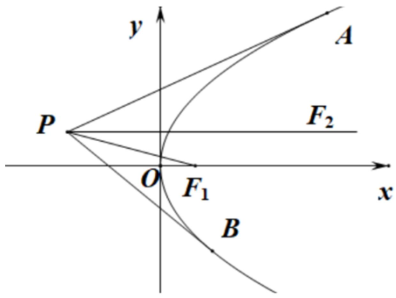
引例 1.椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$F_1$,$F_2$分别为椭圆的左右焦点,过椭圆外一点$P(x_0,y_0)$作椭圆的两条切线$PA$,$PB$,求证：$\angle APF_1=\angle BPF_2$



引例 2.双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,$F_1$,$F_2$分别为双曲线的左右焦点,过双曲线外一点$P(x_0,y_0)$作双曲线的两条切线$PA$,$PB$,求证：$\angle APF_1=\angle BPF_2$.



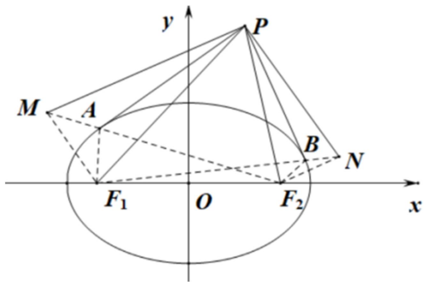
引例 3.抛物线$y^2=2px(p>0)$，F_1为抛物线的焦点，过抛物线外一点$P(x_0,y_0)$作双曲线的两条切线PA,PB，再过P作平行于x轴的直线PF_2，求证：$\angle APF_1=\angle BPF_2$.



我们以椭圆为例说明上述性质的几何背景.

（彭赛列小定理）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$,$F_2$分别为椭圆的左右焦点，过椭圆外一点$P(x_0,y_0)$作椭圆的两条切线$PA$,$PB$，求证：$\angle APF_1=\angle BPF_2$.

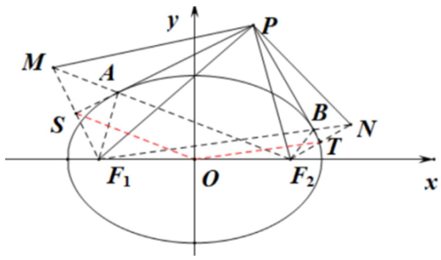
结论 1：$\angle AF_1P+\angle BF_2P+\angle APB=180°$.



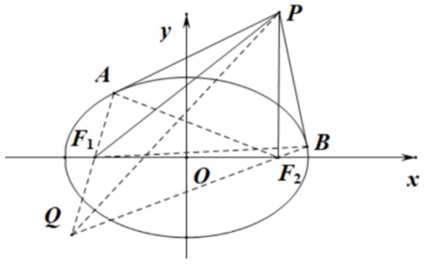
结论 2：若动点 P 满足 $PA\perp PB$，则点 P 的轨迹为椭圆的外准圆——蒙日圆.

结论 3：PF_1 平分 $\angle AF_1B$，PF_2 平分 $\angle AF_2B$.

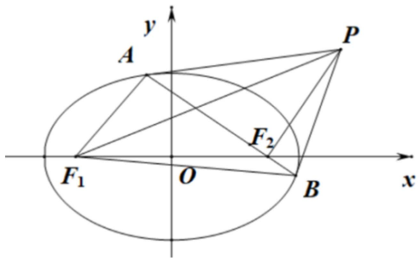
结论 4：设过 F_1 作 PA 垂线的垂足为 S，过 F_2 作 PB 垂线的垂足为 T，则 $OS=OT=a$.



结论 5：直线 AF_1 与 BF_2 交于点 Q，则 PQ 平分 $\angle AQB$.



结论 6：如图，点 P 的切点弦 AB 过焦点 F_2，则 PF_1 平分 $\angle AF_1B$.



例 1.过圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上的动点 P 作椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的两条切线 PA、PB，

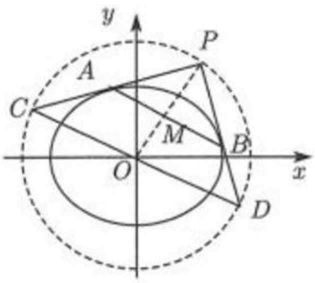
（1）则 $PA\perp PB$

（2）延长 PA、PB 交圆 O 于点 C、D，则 C、O、D 三点共线；

（3）$CD//AB$；

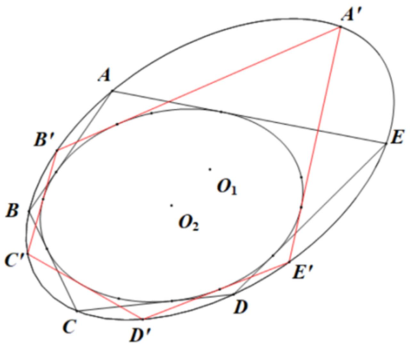
（4）$k_{OP}k_{AB}=k_{OP}k_{CD}=k_{OA}k_{PA}=k_{OB}k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}$

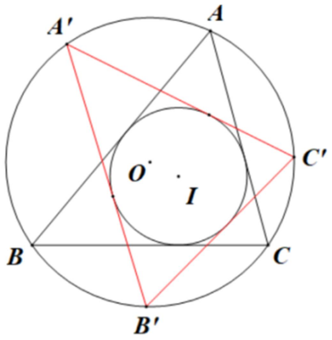
（5）$k_{OA}k_{OB}=-\frac{b^4}{a^4}$



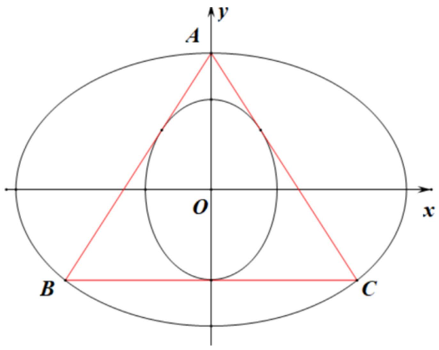
2、彭赛列大定理

平面上给定两条圆锥曲线，若存在一封闭多边形外切其中一条圆锥曲线且内接另一条圆锥曲线，则此封闭多边形内接的圆锥曲线上每一个点都是满足这样（外切、内接）性质的封闭多边形的顶点，且所有满足此性质的封闭多边形的边数相同。

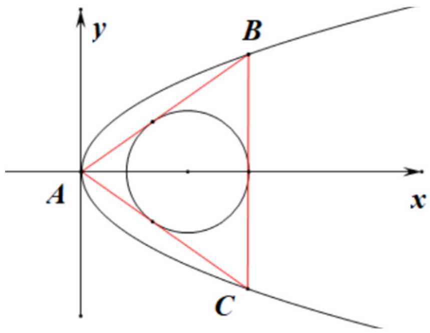




例 1（彭赛列条件）椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，椭圆 C_2：$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1(c,d>0)$，若存在三角形与椭圆 C_1 外切，且与椭圆 C_2 内接，求正实数 a,b,c,d 所满足的条件.



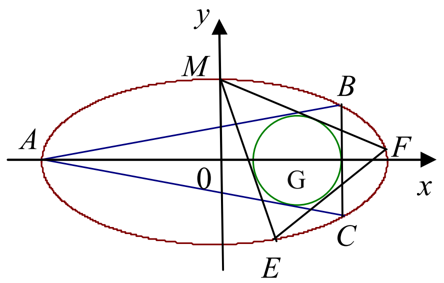
例 2（彭赛列条件）抛物线 C_1：$y^2=2px(p>0)$，圆 C_2：$(x-a)^2+y^2=r^2(a,r>0)$，从抛物线 C_1 上一点 A 引圆 C_2 的两条切线分别交抛物线 C_1 于 B,C，若 BC 也是圆 C_2 的切线，求 p,a,r 满足的条件.



例 3.如图，已知圆 G：$(x-2)^2+y^2=r^2$ 是椭圆$\frac{x^2}{16}+y^2=1$ 的内接$\triangle ABC$ 的内切圆, 其中 A 为椭圆的左顶点

（1）求圆 G 的半径 r；

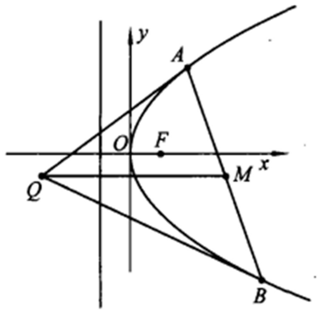
（2）过点 $M(0,1)$作圆 G 的两条切线交椭圆于 E、F 两点, 证明: 直线 EF 与圆 G 相切。



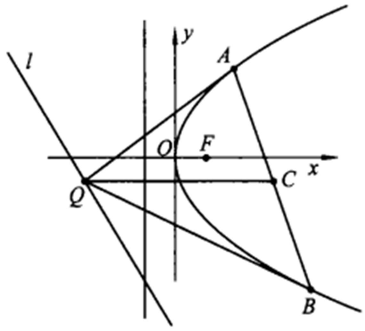
3、阿基米德三角形

圆锥曲线的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形叫做阿基米德三角形

性质 1：阿基米德三角形底边上的中线平行于抛物线的轴；



性质 2：若阿基米德三角形的底边即弦 AB 过抛物线的定点 C ，则另一顶点 Q 的轨迹为一条直线；

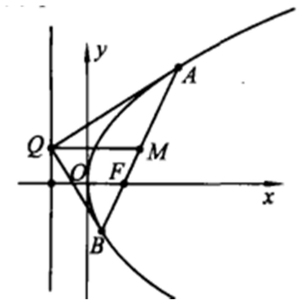


性质 3：抛物线以 C 点为中点的弦平行于 Q 点的轨迹；

性质 4：若直线 l 与抛物线没有公共点，以 l 上的点为顶点的阿基米德三角形的底边过定点；

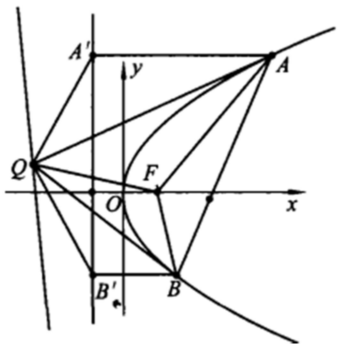
性质 5：底边为 a 的阿基米德三角形的面积最大值为$\dfrac{a^3}{8p}$;

性质 6：若阿基米德三角形的底边过焦点，顶点 Q 的轨迹为准线，且阿基米德三角形的面积最小值为 p^2



性质 7：$QF^2=AF^2\cdot BF^2$

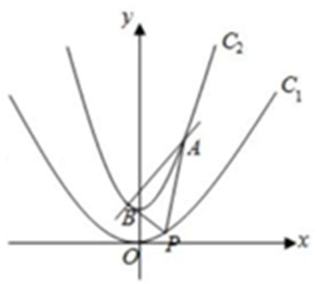
性质 8：在阿基米德三角形中，$\angle QFA=\angle QFB$



例 1.如图，已知抛物线 C_1：$x^2=2py$ 的焦点在抛物线 C_2：$y=x^2+1$ 上，点 P 是抛物线 C_1 上的动点，

（1）求抛物线 C_1 的方程及其准线方程；

（2）过点 P 作抛物线 C_2 的两条切线，A、B 分别为两个切点，求△PAB 面积的最小值。



第二部分 一类特殊的双曲线

例 1.已知双曲线 $xy=1$ 上的三点 A、B、C 构成一个正三角形，求这三个点的横坐标和纵坐标之和的乘积的所有可能的值。

例 2.已知抛物线 $y=x^2-\alpha$ 与双曲线 $xy=1$ 在第一象限交于点 A，在第三象限交于点 B 和 C

（1）求所有的 α 的值，使得$\triangle ABC$ 为直角三角形；

（2）对于（1）中求得的 α，求此直角三角形的面积。

例 3.设 a 和 b 为实数，抛物线 $y=ax^2+b$ 与曲线 $y=x+\frac{1}{x}$ 恰有三个交点，证明：$3ab<1$

例 4.给定两条双曲线 H_1、H_2，其方程分别为 $xy=1$ 和 $xy=-1$，一条直线与双曲线 H_1 交于点 A 和 B，与双曲线 H_2 交于点 C 和 D，设 O 为坐标原点，证明：$S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOD}$

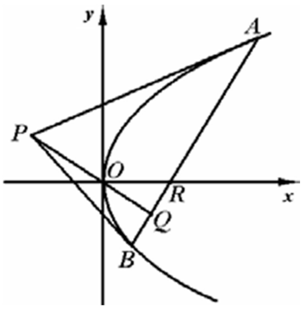
例 5.给定两条双曲线 H_1、H_2，其方程分别为 $xy=1$ 和 $xy=-1$，M 为双曲线 H_1 上任意一点，过 M 作双曲线 H_2 的两条切线 MM_1 和 MM_2，切点分别为 M_1 和 M_2，证明：点 M_1M_2 为双曲线 H_1 的切线。

第三部分 进阶训练

例 1.（2014 年）平面直角坐标系 xOy 中，P 是不在 x 轴上的一个动点，满足条件：过 P 可作抛物线 $y^2=4x$ 的两条切线，两切点连线 l 与 PO 垂直．设直线 l 与直线 PO，x 轴的交点分别为 Q，R，P

（1）证明 R 是一个定点；

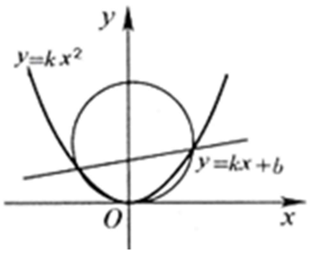
（2）求$\dfrac{PQ}{QR}$的最小值．



例 2.（2020 年联赛）在平面直角坐标系中，点 A、B、C 在双曲线 $xy=1$ 上，满足△ABC 为等腰直角三角形，求△ABC 的面积的最小值。

例 3.（2022 年联赛 A1 卷）在平面直角坐标系 xOy 中，设一条动直线 l 与抛物线Γ:$y^2=4x$ 相切，且与双曲线 Ω：$x^2-y^2=1$ 交于左、右两支各一点 A、B．求ΔAOB 的面积的最小值．

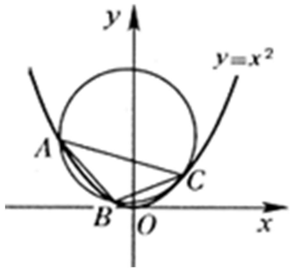
例 4.已知实数 $a,b,k(k>0)$，圆心为(a,b)的圆至少与抛物线 $y=kx^2$ 有三个公共点，一个是原点(0,0)，另两个在直线 $y=kx+b$ 上，证明：$b\geq2$



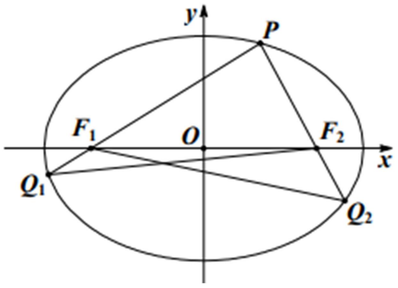
例 5.设 A，B，C 是抛物线 $y=x^2$ 上不同的点，R 是$\triangle ABC$ 外接圆的半径，

（1）证明：$R>\dfrac{1}{2}$；

（2）是否存在常数 $c>\dfrac{1}{2}$，使得对任何不同的点 A，B，C，不等式 $R\geq c$ 都成立？



例 6.如图，在平面直角坐标系中，椭圆 Γ：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，设 P 是第一象限内 Γ 上一点，PF_1、PF_2 的延长线分别交 Γ 于点 Q_1，Q_2，设 r_1，r_2 分别为$\triangle PF_1Q_2$，$\triangle PF_2Q_1$ 的内切圆半径，求 r_1-r_2 的最大值。



【自主练习】

1．从圆 $x^2+y^2=4$ 上的点向椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 引切线，两个切点间的线段称为切点弦，则椭圆 C 内不与任何切点弦相交的区域面积为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{2}$　　　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　　　C．$\dfrac{\pi}{4}$　　　　D．前三个答案都不对

2．内接于椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的菱形周长的最大值和最小值之和是（　　）

A．$4\sqrt{13}$　　　　B．$14\sqrt{13}$　　　　C．$\dfrac{110}{3}\sqrt{13}$　　　　D．上述三个选项都不对

3．如图，C_1，C_2 是离心率都为 e 的椭圆，点 A，B 是分别是 C_2 的右顶点和上顶点，过 A，B 两点分别作 C_1 的切线 l_1，l_2．若直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，则 $|k_1k_2|$ 的值为（　　）

A．e^2　　　　B．e^2-1　　　　C．$1-e^2$　　　　D．$\dfrac{1}{e^2}$