复数

1.复数的表示与运算

复数的三种表示 （1）代数形式：$z=a+bi$，其中 i 为虚数单位（理论上，每次使用 i 均需交代，本讲义中默认，不再重复交代），满足 $i^2=-1$； $a=\mathrm{Re}(z)$， $b=\mathrm{Im}(z)$.

（2）三角形式： $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $\theta=Arg(z)$ 称为 z 的幅角，若 $\theta\in[0,2\pi)$，则 $\theta=\arg(z)$ 称为幅角主值. 易知当 $z\neq 0$ 时，$Arg(z)=\arg(z)+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$；0 的幅角是任意的.

（3）欧拉形式： $z=e^{r+\theta i}$，转换为三角形式为 $z=e^r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

复数的共轭运算与四则运算（参见人教版高中数学必修二）

例 1.1（2022 联赛 A.4） 若复数 z 满足：$\dfrac{z-3i}{z+i}$ 为负实数，$\dfrac{z-3}{z+1}$ 为纯虚数，则 z 的值为________.

例 1.2（2021 联赛 A.9） 已知复数列 $\{z_n\}$ 满足：$z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $z_{n+1}=\overline{z_n}(1+z_n i)$， $n\geq 1$. 求 z_{2021} 的值.

例 1.3 解方程： $z^3=1+\sqrt{3}i$.

复数的乘方与开方（棣莫弗公式） $\left[|z|(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^n=|z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$；

$$\sqrt[n]{|z|(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

例 1.4（2022 联赛 B1.5） 设 z_0 为复数，集合 $A=\{z_0+i^k\mid k\in\mathbf{Z}\}$. 若 A 的所有元素之和为 $8+8i$，则 A 的所有元素之积为________.

三角不等式 对任意复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，均有 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|\geq|z_1+z_2+\cdots+z_n|$.

例 1.5（2019 联赛 A.11） 称一个复数数列 $\{z_n\}$ 为"有趣的"，若 $|z_1|=1$，且对任意正整数 n，均有 $4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$. 求最大的常数 C，使得对一切有趣的数列 $\{z_n\}$ 及任意正整数 m，均有 $|z_1+z_2+\cdots+z_m|\geq C$.

2.单位根与复系数多项式

韦达定理 复系数方程 $c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z_1+c_0=0$ $(c_0,c_1,\cdots,c_n\in\mathbf{C},c_n\neq 0,n\geq 1)$ 的 n

个根分别为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ ，则 $\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i=-\dfrac{c_{n-1}}{c_n}\\ \sum\limits_{1\le i<j\le n} z_iz_j=\dfrac{c_{n-2}}{c_n}\\ \cdots \\ \prod\limits_{i=1}^{n} z_i=(-1)^n\dfrac{c_0}{c_n}\end{cases}$.

单位根 方程 $z^n-1=0$ 的所有根为 $1,\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n},\cdots,\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$，称为 n 次单位根. 记 $\varepsilon_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n},k=0,1,\cdots,n-1$. 当 $(k,n)=1$ 时，称 ε_k 为本源单位根，则所有 n 次单位根可记作：$1,\varepsilon_k,\varepsilon_k^2,\cdots,\varepsilon_k^{n-1}$ 或 $\varepsilon_k,\varepsilon_k^2,\cdots,\varepsilon_k^n$.

例 2.1（2021 北大夏令营改编） （1）已知 z_1 、 z_2 是单位根，且 $|z_1+z_2|=1$ ，求证：z_1+z_2 是单位根；

（2）已知 z_1 、 z_2 、 z_3 是单位根，且 $|z_1+z_2+z_3|=1$ ，求证： $z_1+z_2+z_3$ 是单位根.

单位根的性质 （1）给定 $n\ge 2$ ，则所有 n 次单位根的和为 0.

（2）$1^m+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=\begin{cases}0,n\nmid m\\ n,n\mid m\end{cases}$.

例 2.2 n 为给定不小于 2 的正整数，求 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{n(k-1)+k}{n(n+1)}\pi$ 的值.

代数基本定理 复系数多项式 $f(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z_1+c_0$ $(c_0,c_1,\cdots,c_n\in\mathbf{C},c_n\ne 0,n\ge 1)$ 在复数域内必有根.

例 2.3 已知 $f(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_0$ 为 n 次复系数多项式，证明：一定存在复数 $z_0(|z_0|\le 1)$，使得 $|f(z_0)|\ge|c_0|+\max\limits_{1\le k\le n}\dfrac{|c_k|}{\left[\frac{n}{k}\right]}$.

定理 实系数多项式的复根是共轭出现的.

例 2.4（2021 联赛 A1.10） 设 $a,b\in\mathbf{R}$. 若关于 z 的方程 $(z^2+az+b)(z^2+az+2b)=0$ 有 4 个互不相等的复数根 z_1,z_2,z_3,z_4 ，且它们在复平面上对应的点恰是一个边长为 1 的正方形的四个顶点，求 $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ 的值.

3.复数与平面几何

三点共线的判定 复平面上三点 z_1 、 z_2 、 z_3 共线的充要条件是：存在不全为零的实数

x_1、x_2、x_3，且 $x_1+x_2+x_3=0$，使得 $x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3=0$.

四点共圆的判定　复平面上四点 z_1、z_2、z_3、z_4 共线的充要条件是：存在非零实数 λ，使得 $\dfrac{z_3-z_1}{z_4-z_1}:\dfrac{z_3-z_2}{z_4-z_2}=\lambda$.

三角形的面积　复平面上三点 z_1、z_2、z_3 围成的三角形的面积为 $\dfrac{i}{4}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3}\end{vmatrix}$.

例 3.1　用复数法证明托勒密不等式.