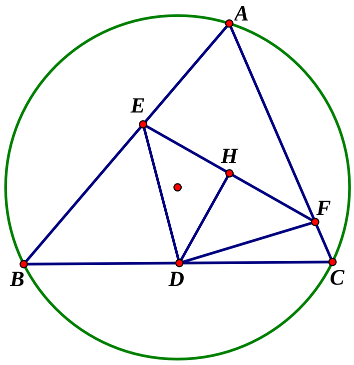
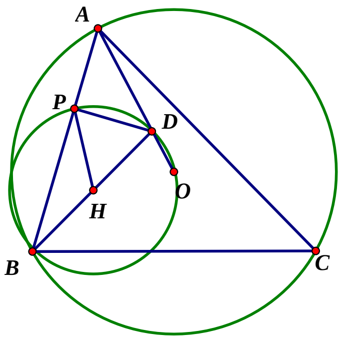
2023年江苏省高中数学冬令营讲座
综合性的平面几何

南京外国语学校　黄志军

1.如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，D 为 BC 中点，连接 DH，过 H 作 $EF\perp DH$,分别交 AB、AC 于 E、F，连接 DE、DF.求证：$DE=DF$.

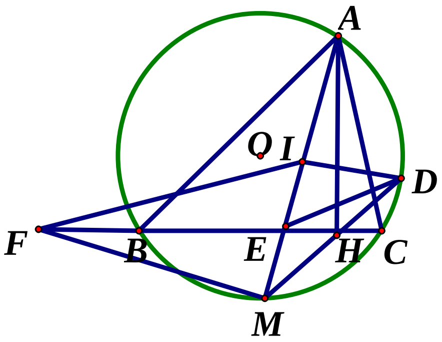


2.设锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O，垂心为 H.AO 与 BH 交于点 D，点 P 在直线 AB 上，且满足 $PH=PD$.求证：B、D、O、P 四点共圆.

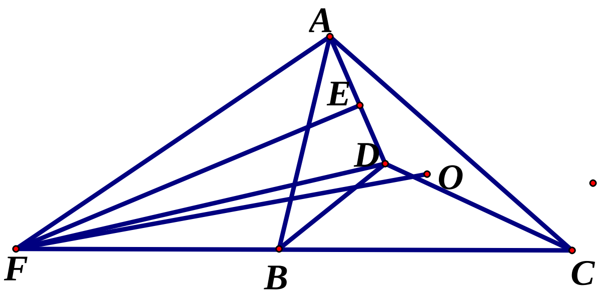


3. 如图，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，$AH\perp BC$ 于 H，I 为$\triangle ABC$ 内心，延长 AI 交 BC 于 E，交$\odot O$ 于 M，连结 MH 并延长交$\odot O$ 于 D，连结 ID、ED，过 M 作 $MF\perp AM$ 交 CB 于 F，连结 IF，

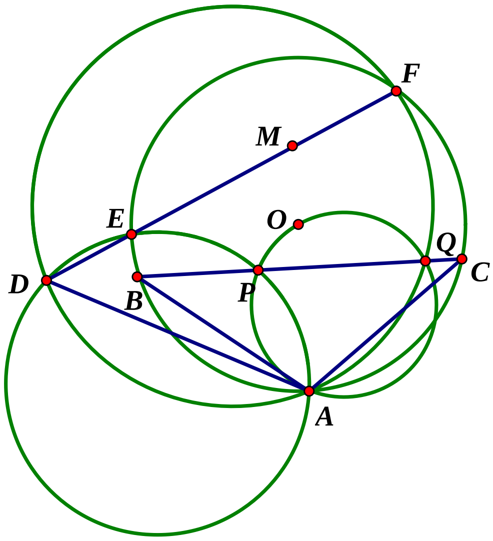
证明：$\angle IFM=\angle IDE$



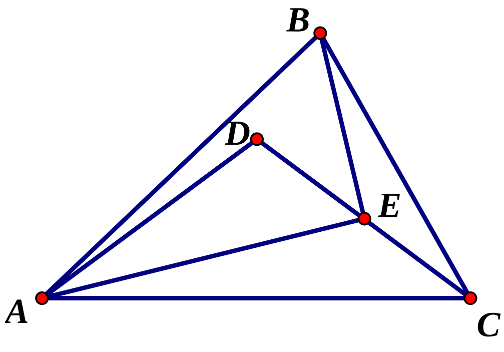
4.如图，O 为$\triangle ABC$ 外心，D 为$\triangle ABC$ 内一点，使得$\angle DAB=\angle DBC$,$\angle DAC=\angle DCB$,E 为 AD 中点，过 E 作 $EF\perp AD$ 交 CB 延长线于 F,连接 FA、FD、FO,求证：$\angle AFD=2\angle OFC$.



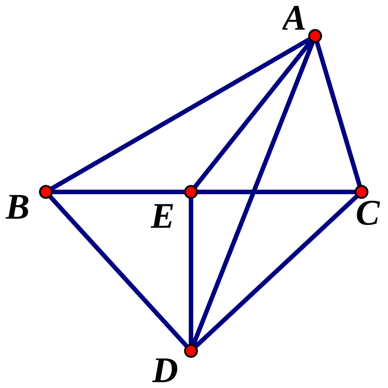
5.等腰△ABC，$AB=AC$,且∠BAC钝角，O 为其外心，M 为 A 关于 BC 对称点，在 CB 延长线上任取一点 D，直线 DM 与⊙(ABC)交于点 E、F，⊙(ADE)与⊙(ADF)分别与 BC 再次交于点 P、Q.求证：DA 与⊙(OPQ)相切.



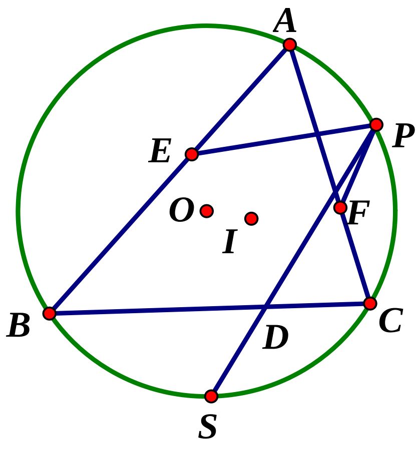
6.△ABC 中，∠ABE=∠BCA=60°，BE⊥AE，$DE=CE$.求证：$AD=CD$.



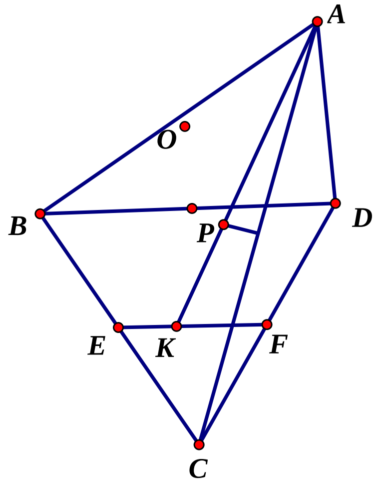
7.如图，D 为$\triangle ABC$ 所在平面上一点，使得$\angle BDC=90°$,且 AD 平分$\angle BAC$，$DE\perp BC$ 于 E，证明：$\angle AEC=2\angle ADC$.



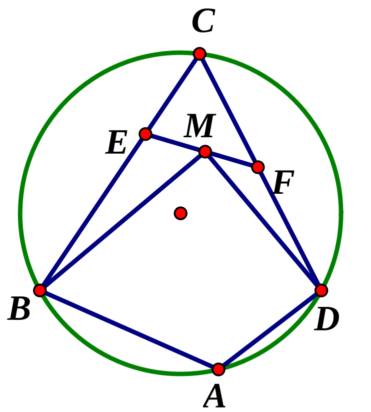
8.如图，D、E、F 在$\triangle ABC$ 三边上，$BD=BE$,$CD=CF$,I 是内心，S 为弧（BC）中点，SD 交外接圆于 P.求证：PI 平分$\angle EFP$.



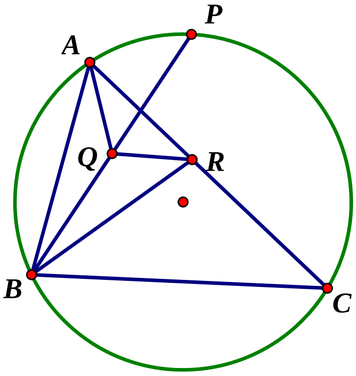
9.凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$=60°，$\triangle BCD$ 为正三角形，E、F 分别为 BD、CD 的中点，$\angle BAD$ 的平分线交直线 EF 于点 K，AC 的中垂线交 AK 于点 P,求证：AP=2PK.



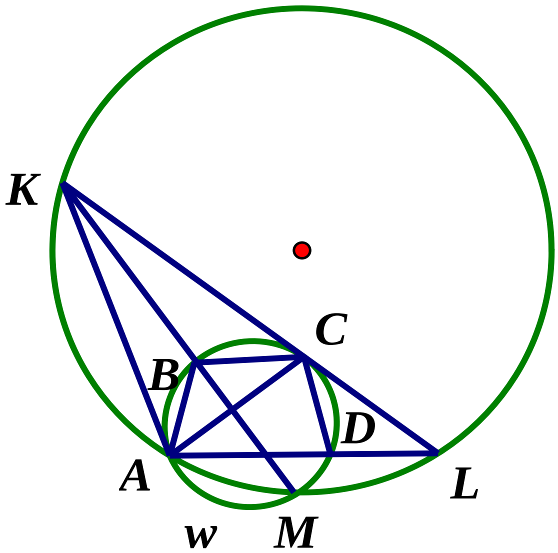
10.如图，$ABCD$ 为圆内接四边形，$AB<BC$，$AD<DC$.E、F 分别为边 BC、CD 上的点，满足 $AB=BE$，$AD=DF$，记 EF 的中点为点 M.求证：$\angle BMD = 90°$.



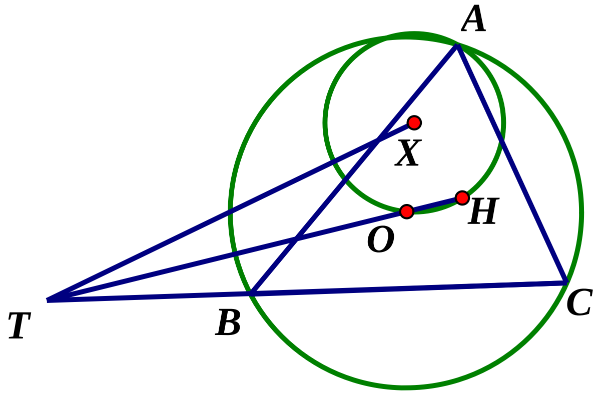
11.已知△*ABC* 中，*AB*< *AC*.在其外接圆上取弧 *BAC* 的中点 *P*，直线 *BP* 与∠*BAC* 平分线交于点 *Q*，过 *Q* 作 *BC* 的平行线与 *AC* 交于点 R.求证：*B*R=*C*R.



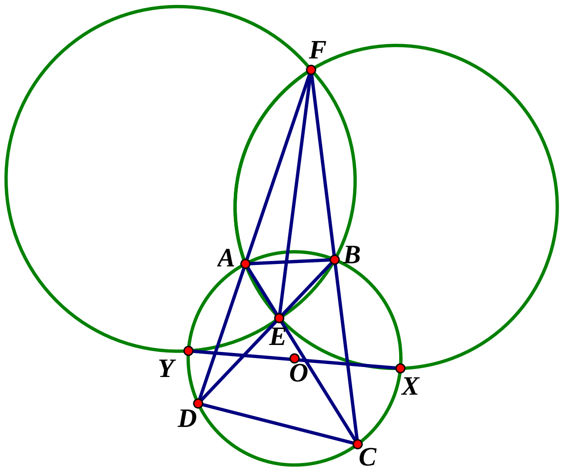
12.已知 *A*、*B*、*C*、*D* 是圆ω上的四点，满足 *AB*=*BC*=*CD*.圆ω在点 *C* 处的切线与圆ω在点 *A* 处的切线、直线 *AD* 分别相交于点 K、L.圆ω与△KL*A* 的外接圆再次相交于点 *M*.证明：*MA*=*M*L.



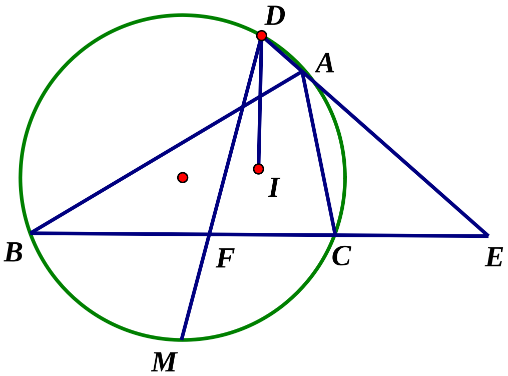
13.在△*ABC* 中，∠*C*<∠*B*<∠*A*< 90°，设△*ABC* 的外心、垂心分别为 *O*、*H*.直线 *OH* 交 *BC* 于点 T，△*AHO* 的外心为点 X.求证：点 *H* 关于直线 XT 的对称点在△*ABC* 的外接圆上.



14.四边形 *ABCD* 内接于圆Ω，且 *AB*< *CD*.已知 *AC*、*BD* 交于点 *E*，*AD*、*BC* 交于点 *F*,圆Ω与⊙(*FAE*)、⊙(*FBE*)分别再次交于点 X、Y.若 XY 恰为圆Ω的直径，证明：XY⊥*EF*.



15.I 是△ABC 的内心，D 是△ABC 外接圆上的点，DA 在直线 BC 的同旁，且 DI⊥BC，直线 DA 与 BC 交于点 E，M 是弧 BC 的中点，DM 交 BC 于点 F，求证：I 是△DEF 的垂心.



16.如图，四边形 $ABCD$ 内接于圆Ω，I，I_1，I_2分别是△ABC，△ABD，△ACD 的内心，过 D,I_1，I_2的圆与圆Ω的另一交点为 E，过点 E 垂直于 IE 的直线交 BC 于 F，求证：IF⊥IA.