数列综合

2022年江苏省数学冬令营

一、数列的递推与通项

1．（1）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求通项a_n.

（2）正数数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$，　$n\in\mathbf{N}^*$，求通项a_n.

（3）数列$\{a_n\}$满足$(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_n-2(n-1)$，且$a_{100}=10098$，求通项$a_n$.

2．（1）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$，则$a_{16}=$________.

（2）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & 0\leqslant a_n<\dfrac{1}{2}\\ 2a_n-1, & \dfrac{1}{2}\leqslant a_n<1\end{cases}$，若$a_1=\dfrac{6}{7}$，则$a_{2023}$的值为_________.

3．（1）已知数列$\{a_n\}$($n\in\mathbf{N}^*$)的首项$a_1=1$，前n项和为S_n．若$a_n>0$，

且$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a_{n+1}}$，求通项$a_n$.

（2）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\dfrac{\pi}{6}$，$a_{n+1}=\arctan(\sec a_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，求正整数$m$，使得

$$\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\cdots\cdot\sin a_m=\frac{1}{100}.$$

4．（1）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=2a_n-3$，$a_1=5$，$n\in\mathbf{N}^*$，求通项a_n.

（2）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+3^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求通项a_n.

（3）设数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足：$S_n+a_n=\dfrac{n-1}{n(n+1)}$，$n=1$，$2$，…，求通项$a_n$.

（4）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=3$，$a_n=a_{n-1}+\dfrac{2a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$，求通项$a_n$.

5．（1）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$，$(n\in\mathbf{N}^*$，$n>1)$，

则$a_n=$______.

（2）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+1}=6a_n-9a_{n-1}$，$(n\in\mathbf{N}^*$，$n>1)$，

则$a_n=$________.

（3）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n+2$，$n\in\mathbf{N}^*$，则$a_n=$_____.

6.（1）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}$，则 $a_n=$________.

（2）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=2t-3(t\in\mathbf{R}$ 且 $t\neq\pm1)$，$a_{n+1}=\dfrac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1}$

$(n\in\mathbf{N}^*)$．求数列$\{a_n\}$的通项公式.

7.（1）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{2a_n-1}$，求 a_n.

（2）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})$，求数列$\{a_n\}$的通项.

8.（1）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+\sqrt{3a_n^2+1}$，则 $a_n=$________.

（2）数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$，则 $a_n=$________.

9.（1）已知数列$\{a_n\}$（$n\geqslant0$）满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_n=\dfrac{a_{n-1}a_{n-2}+7}{a_{n-3}}(n\in\mathbf{N}^*，n\geqslant4)$.

证明：这个数列中的任意一项均为整数.

（2）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}^2-3^n}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_n=$________.

10.（1）有 1 个 $2\times n$ 的棋盘，用 n 张相同的 1×2 的矩形去覆盖，有多少种不同的覆盖方法？

（2）把一个圆分成 n 个不同的扇形$(n\geqslant2)$，依次记为 S_1，S_2，…，S_n，每个扇形都可以用红、蓝、白三种颜色中任一种涂色，要求相邻的扇形颜色互不相同，问有多少种涂法?

11．将数字 1，2，3，…，n 填入标号为 1，2，3，…，n 的 n 个方格内，每格一个数字，则标号与所填数字均不相同的填法有多少种？

12．设 $a_i=0$，1（$i=1$，2，3，…，n），试求满足

$$a_1\leqslant a_2，a_2\geqslant a_3，a_3\leqslant a_4，a_4\geqslant a_5，\cdots$$

的序列（a_1，a_2，a_3，a_4，…，a_n）的个数.

二、数列与不等式

1．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$.

（1）求证：$\sqrt{2n-1}\leqslant a_n\leqslant\sqrt{3n-1}$；

（2）求证：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant\sqrt{2n-1}$.

2．已知数列$\{a_n\}$满足 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$.

证明：如果 $a_1\in(0，1)$，则对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\in(0，1)$.

3．求证：$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2$.

变式：（1）$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{7}{4}$.

（2）$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{5}{3}$.

类题：求证：$1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{5}{4}$.

4．当 x 为实数时，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分.

（1）证明：$\sqrt{2022}$和$\sqrt{2023}$具有相同的整数部分；

（2）求 $\sum\limits_{i=1}^{2022}\dfrac{1}{\sqrt{i}}$的整数部分.（2022 南大数学拔尖班选拔）

5． 求证：$\dfrac{1}{2-1}+\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{2^3-1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<2$.

变式：$\dfrac{1}{2-1}+\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{2^3-1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<\dfrac{5}{3}$.

类题：（1）已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，证明：$\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}$.

（2）求证：$\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{2}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{2^n+n}<2$.

6．（1）已知 $n\in\mathbf{N}^*$，求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\geqslant\frac{n+1}{2}$.

（2）已知 $n\in\mathbf{N}$，求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\geqslant\frac{7n+11}{12}$.

类题：（1）已知 $n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\geqslant\frac{5n}{6}$.

（2）求证：$\frac{3}{2}\leqslant(1+\frac{1}{2n})^n<2$.

7．求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}<\frac{25}{36}$.

三、数列综合题

1．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=(1+\frac{3}{n})a_n+2-\frac{3}{n}$，求证：$a_n\in\mathbf{Z}$.

2．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=12$，$a_{n+2}=\frac{(a_{n+1}+5)^2}{a_n}$.

求证：（1）$a_n\in\mathbf{Z}^+$；

（2）$\sqrt{a_{2023}}+\sqrt{3a_{2024}}\in\mathbf{Z}^+$.

3．已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：$a_1=1$，$b_1=-1$，$a_{n+1}=a_nb_{n+1}$，$b_{n+1}=\frac{b_n}{1-4{a_n}^2}$，求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

4．数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})^3(n+a_n)$.

（1）求证：$a_n=n^3(1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2})$；

（2）求证：$\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{a_k})<3$.（2018 年中科大自主招生）

5．已知数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$满足 $a_0=1$，$b_0=0$，且$\begin{cases}a_{n+1}=7a_n+6b_n-3\\b_{n+1}=8a_n+7b_n-4\end{cases}$，$(n\in\mathbf{N})$，

证明：a_n是完全平方数．

6．数列$\{a_n\}$按如下法则定义：$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4a_n}$，证明：对 $n>1$，$\sqrt{\frac{2}{2a_n^2-1}}$均为正整数．

7．已知整数数列$\{a_n\}$，满足对所有正整数 n，均有：$a_n+a_{n+1}=2a_{n+2}a_{n+3}+2016$，求 a_1，a_2的所有可能值．（2016 香港队选拔考试）

8．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_0=2$，$a_1=10$，且 $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$，求证：a_n可以表示成两个整数的平方和．

9．给定正整数 n（$n\geqslant 2$），正数数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n满足：$a_k\geqslant a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}$（$k=2$，3，4，…，$n$）．求 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}$ 的最大值，并求取得最大值的条件．

10．设正实数数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：对任意整数 $n\geqslant 101$，有

$$a_n=\sqrt{\frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100}b_{n-j}^{2}},\ b_n=\sqrt{\frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100}a_{n-j}^{2}}.$$

证明：存在正整数 m，使得$|a_m-b_m|<0.001$．

11．设正实数数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：对任意正整数 n，均有

$$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}},\ b_{n+1}=b_n+\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}}.$$

（1）若 $a_{100}b_{100}=a_{101}b_{101}$，求 a_1-b_1 的值；

（2）若 $a_{100}=b_{99}$，比较 $a_{100}+b_{100}$ 与 $a_{101}+b_{101}$ 的大小．