高二数论 (半天)

1. 设 $m < n$ 是两个互素的正整数, $1 \sim mn$ 所有被 m 或者 n 整除的自然数共有 $m+n-1$ 个, 从小到大依次记为 $a_1 = m, a_2, \ldots, a_{m+n-1} = mn$. 求 $\sum\limits_{k=1}^{m+n-1}(-1)^k a_k$.

2. 设整数 $m \geq 2$. 令 $P = \prod\limits_{\substack{1\leq k\leq m\\(k,m)=1}} k$. 证明；$P \equiv \pm 1 \pmod m$ 且 $P \equiv -1 \pmod m \Leftrightarrow$ 同余方程 $x^2 \equiv 1 \pmod m$ 的解为 $\pm 1 \pmod m \Leftrightarrow$ 存在模 m 的原根.

3. 求所有的正整数 n 使得对任意整数 a, 同余式 $a^{n+1} \equiv a \pmod n$ 都成立.

4. 设正整数 $n \geqslant 2$, 并且对于所有与 n 互素的整数 a 都有 $a^n \equiv a \pmod n$. 证明: (1) n 无平方因子; (2) 若 n 的素因子个数不超过 2, 则 n 是素数.

5. 设 $p = 4k+3$ 是素数. 证明：$\dfrac{1}{0^2+1} + \dfrac{1}{1^1+1} + \cdots + \dfrac{1}{(p-1)^2+1} \equiv 2k+2 \pmod p$.

6. (1) 设 $k, m \in \mathbb{N}^*$, 若对任意素数 $p|m$, 都有 $p-1 \nmid k$. 证明：$\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\(i,m)=1}} \dfrac{1}{i^k} \equiv 0 \pmod m$.

   (2) 设 p 是素数, 如果存在正奇数 k 满足 $p-1 \nmid k+1$, 证明: $\sum\limits_{i=1}^{p-1} \dfrac{1}{i^k} \equiv 0 \pmod{p^2}$.

7. 一个正整数 n 称为“好数”, 如果对任意无限个互不相同的素数构成的数列: $p_1, p_2, p_3, \ldots$, 都存在 n 项 $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n} (i_1 < i_2 < \cdots < i_n)$ 使得 $p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n} \equiv 1 \pmod{2022}$. 求所有小于 2022 的“好数” 的和.

8. 给定正整数 n 求方程 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{n}$ 的正整数解 (x, y) 且 $x \leq y$ 的个数.

9. 设 $n \in \mathbb{N}$, 如果 $24|n+1$, 则 $24|\sigma(n)$.

10. 设函数 $g(n) = \sum\limits_{k=1}^{n}(k, n)$. 证明： $g(n)$ 是积性函数, 并求 $g(p^\alpha)$, 其中 p 是素数，$\alpha \in \mathbb{N}^*$.

11. 设 q 是素数且 $q - 1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$, 其中 $p_1, \ldots, p_t$ 是互异素数，$\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ 是正整数. 求介于 q 与 q^2 之间满足 $n^n \equiv 1 \pmod q$ 的整数 n 的个数(用 $p_i, \alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant t$ 表示).