

## 解析几何

1. 平面直角坐标系中, 直线  $l$  过双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  的一个焦点, 且与双曲线交于  $A, B$  两点. 若以  $AB$  为直径的圆与  $y$  轴相切, 则  $|AB| =$  \_\_\_\_\_.

2. 双曲线的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 一条过  $F_2$  的直线与双曲线的右支交于  $A, B$  两点. 若  $\triangle F_1AB$  为正三角形, 则双曲线的离心率为 \_\_\_\_\_.

3. 在平面直角坐标系中, 已知  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  交于  $P(3, 2), Q$  两点, 两圆半径之积为  $\frac{13}{2}$ . 若两圆均与直线  $l: y = kx$  和  $x$  轴相切, 则直线  $l$  的方程为 \_\_\_\_\_.

4. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 其左、右焦点为  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ . 实数  $a, b, c$  构成等比数列. 设  $P$  为椭圆  $E$  上任意一点,  $I$  为  $\triangle PF_1F_2$  的内心,  $y_P, y_I$  分别为点  $P, I$  的纵坐标, 则  $\frac{|y_P|}{|y_I|}$  的值为 \_\_\_\_\_.

5. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  和抛物线  $y^2 = \frac{1}{2}ax$  交于点  $A, B$ , 点  $P$  为椭圆的右顶点, 若  $O, A, P, B$  四点共圆, 则椭圆的离心率为 \_\_\_\_\_.

6. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{20} = 1 (a > 2\sqrt{5})$  的左焦点为  $F$ , 点  $P(1, 1)$ . 已知过点  $P$  的直线  $l$  与椭圆交于点  $A, B$ ,  $M$  为  $AB$  的中点, 使得  $|FM|$  是  $|FA|$  与  $|FB|$  的等比中项. 求  $a$  的最小正整数值, 并求此时  $l$  的方程.

7. 已知点  $M(-1, 0), N(1, 0)$ ,  $\triangle MNQ$  的周长为 6, 动点  $Q$  的轨迹为曲线  $C$ ,  $P$  是圆  $x^2 + y^2 = 4$  上任一点 (不在  $x$  轴上),  $PA, PB$  分别与曲线  $C$  切于点  $A, B$ . 求  $\triangle OAB$  面积的最大值 ( $O$  为坐标原点).

8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以  $P$  为圆心的圆与双曲线  $xy = 1$  交于点  $A, B, C, D$ . 记线段  $AB, CD$  的中点分别为  $E, F$ . 证明: 四边形  $OEFP$  为平行四边形.

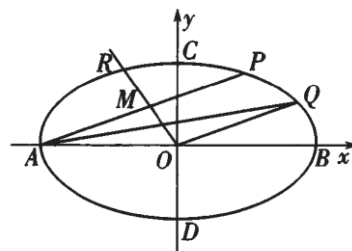
9. 已知双曲线  $x^2 - y^2 = 2$  的左、右焦点分别为点  $F_1, F_2$ , 过定点  $P(2, 3)$  作双曲线  $x^2 - y^2 = 2$  的切线, 切点分别为  $A, B$ , 且点  $A$  的横坐标小于点  $B$  的横坐标.

(1) 求直线  $AB$  的方程;

(2) 证明:  $\angle F_1PA = \angle F_2PB$ .

10. 已知椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,  $A(-4, 0), B(4, 0)$ ,  $C$  为椭圆  $\Gamma$  外一点,  $CA, CB$  分别与椭圆  $\Gamma$  的切线交于点  $R$ , 过点  $B, P$  的椭圆  $\Gamma$  的切线交于点  $S$ . 证明:  $R, C, S$  三点共线.

11. 如图所示, 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $A, B, C, D$  分别为椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右、上、下顶点, 设  $P, Q$  为  $\Gamma$  上位于第一象限的两点, 且满足  $OQ \parallel AP$ ,  $M$  为线段  $AP$  的中点, 射线  $OM$  与椭圆  $\Gamma$  交于点  $R$ . 证明: 线段  $OQ, OR, BC$  能构成一个直角三角形.



12. 设  $F$  是椭圆  $E: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  的左焦点, 过点  $F$  且斜率为正的直线  $l$  与  $E$  相交于  $A, B$  两点, 过点  $A, B$  分别作直线  $AM$  和  $BN$  满足  $AM \perp l, BN \perp l$ , 且直线  $AM, BN$  分别与  $x$  轴相交于  $M, N$ . 求  $|MN|$  的最小值.

13. 过抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点  $F$  作弦  $BC$ , 若弦  $BC$  的垂直平分线交  $BC$  于  $M$ , 交  $x$  轴于  $N$ . 求证:  $|MN|^2 = |FB| \cdot |FC|$ .

14. 设抛物线  $E: y^2 = 2px (p > 0)$  过点  $M(p, 0)$  作两条相互垂直的直线  $l_1, l_2$ , 分别与抛物线  $E$  交于点  $A$  与  $C$ ,  $B$  与  $D$ . 若  $A, B, C, D$  四点共圆于  $\Gamma$ , 求直线  $l_1$  的斜率及圆  $\Gamma$  的方程.

15. 设  $A, B, C$  为抛物线  $y = x^2$  上不同的点,  $R$  为  $\triangle ABC$  外接圆的半径, 求  $R$  的取值范围.