1. $(i-j)m_k+(j-k)m_i+(k-i)m_j=c$. ①

在①中用 j,i 代替 i,j 则 $(j-i)m_k+(i-k)m_j+(k-j)m_i=c$ ②

①+② 可得 $2c=0$ ∴ $c=0$ ∴ ①化为

$(i-j)m_k+(j-k)m_i+(k-i)m_j=0$ ③

在③中取 i,j,k 分别为 $1,2,3$ 可得

$$(1-2)\cdot\frac{a_1+a_2+a_3}{3}+(2-3)a_1+(3-1)\cdot\frac{a_1+a_2}{2}=0 \Rightarrow a_1+a_3=2a_2$$

假设 $a_1,a_2\cdots a_{n-1}$ 为等差数列 $(n\geq 4)$

在③中取 i,j,k 为 $1,2,n$ 可得

$$(1-2)\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+(2-n)a_1+(n-1)\frac{a_1+a_2}{2}=0 \quad ④$$

设 $a_i=a_1+(a_2-a_1)\cdot(i-1)$. $(i=1,2\cdots n-1)$ 代入④

可得 $a_n=a_1+(a_2-a_1)(n-1)$ ∴ 数列 $a_1,a_2\cdots$ 为等差数列.

2. ∵第4行的公差为 $\frac{3}{16}-\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$ ∴ $a_{4j}=\frac{j}{16}$ $(j=1,2\cdots n)$

∴ $a_{44}=\frac{1}{4}$ 设每列的公比均为 q，则 $q^2=\frac{a_{44}}{a_{24}}=\frac{1}{4}$ ∴ $q=\frac{1}{2}$

∴ $a_{ij}=\frac{j}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-4}=\frac{j}{2^i}$ $(i,j=1,2,\cdots n)$

∴ $a_{kk}=\frac{k}{2^k}$ $(k=1,2\cdots n)$

设 $S=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$ ①

$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{n-2}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$ ②

①-② 可得 $\frac{S}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$

∴ $S=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$

$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$.

3. $n=3$时 $a_i=i\ (i=1,2,3)$ 则 $a_i+a_j=3,4,5$

$n=4$时 $a_i=i\ (i=1,2,3)$，$a_4=5$，则 $a_i+a_j=3,4,5,6,7,8$.

$n\geq5$时，假设存在 $a_1,a_2\cdots a_n$ 满足条件，不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$

将 $a_i+a_j\ (1\leq i<j\leq n)$ 由小到大排列为等差数列 S，且公差为 d.

则 S 的前两项为 a_1+a_2，a_1+a_3，最后两项为 $a_{n-2}+a_n$，$a_{n-1}+a_n$

$\therefore a_3-a_2=a_1+a_3-(a_1+a_2)=d=a_{n-1}+a_n-(a_{n-2}+a_n)=a_{n-1}-a_{n-2}>0$

当 $n\geq6$时 可得 $a_3+a_{n-2}=a_2+a_{n-1}$ $\therefore S$中有两项相等 矛盾

当 $n=5$时 则 S中有 $C_5^2=10$项 $\therefore$最后两项为 a_3+a_5，a_4+a_5.

$\because a_1+a_4-(a_1+a_3)=d$ $\therefore a_1+a_4$为S的第3项

$d=a_3-a_2=a_4-a_3$. $\therefore a_2+a_5$为S的第8项.

又$\because (a_3+a_5)-(a_2+a_5)=d$

又$\because a_3+a_4-(a_2+a_4)=d=(a_2+a_4)-(a_2+a_3)$

$\therefore a_2+a_3$，a_2+a_4，a_3+a_4是S中相邻的三项

若 a_1+a_5 是 S 的第4 2次，则

$a_5-a_4=a_1+a_5-(a_1+a_4)=d=a_3-a_2$ ∴ $a_2+a_5=a_3+a_4$，矛盾

若 a_1+a_5 是 S 的第7 2次，则

$a_2-a_1=a_2+a_5-(a_1+a_5)=d=a_4-a_3$ ∴ $a_2+a_3=a_1+a_4$ 矛盾

4. (1) 是. ∵ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$ ∴ $a_{n+1}>a_n$ ∴ 数列单调递增.

取 $r=q>1$ 下面证明对任意 $x>0$ 区间 (x,rx) 中

至多包含数列 $\{a_n\}$ 中的一项

假设 (x,rx) 中有 $\{a_n\}$ 中的两项，不妨假设

$x<a_m<a_{m+1}<rx$ ∴ $\frac{a_{m+1}}{a_m}<\frac{rx}{x}=r=q$ 矛盾

∴ $\{a_n\}$ 是 S 数列

(2) 否.

设 $b_n=2^{n-1}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$，则 $\{b_n\}$ 是 L 数列，由(1)可知 $\{b_n\}$ 是 S 数列

设 $\begin{cases}a_{2i}=b_{2i-1}\\ a_{2i-1}=b_{2i}\end{cases}$ $(i\in\mathbb{Z}_+)$，则 $\{a_n\}$ 是 S 数列

∵ $\{a_n\}$ 不是单调递增的 ∴ $\{a_n\}$ 不是 L 数列

5　已知 a_1, a_2，且 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$，$n\in\mathbb{Z}_+$　二阶齐次线性递归数列

特征根法：特征方程：$x^2+px+q=0$，两个根 x_1, x_2 称为特征根

(1) 若 $x_1\neq x_2$，则 $a_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n$，其中 c_1, c_2 由

$a_1=c_1x_1+c_2x_2$，$a_2=c_1x_1^2+c_2x_2^2$ 确定

定义 a_0 满足 $a_2+pa_1+qa_0=0$ $(q\neq0)$，$a_0=c_1+c_2$

(2) 若 $x_1=x_2$，则 $a_n=(c_1+c_2n)x_1^n$，其中 c_1, c_2 由

$a_0=c_1$，$a_1=(c_1+c_2)x_1$ 确定

$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

特征根为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 特征方程为 $x^2-x-1=0$

$\therefore f_{n+2}-f_{n+1}-f_n=0\ (n\geq 0)$ $f_0=0$ $f_1=1$

三阶齐次线性递归数列. 已知 a_0, a_1, a_2 且

$a_{n+3}+pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0\ (n\geq 0)$

特征方程 $x^3+px^2+qx+r=0$. 三个根 x_1, x_2, x_3 称为特征根.

(1) 若 x_1, x_2, x_3 两两不等, 则 $a_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n+c_3x_3^n$.

(2) 若 $x_1=x_2\neq x_3$ 则 $a_n=(c_1+c_2n)x_1^n+c_3x_3^n$

(3) 若 $x_1=x_2=x_3$, 则 $a_n=(c_1+c_2n+c_3n^2)x_1^n$.

$a_{n-2}a_{n+1}=3+a_na_{n-1}$ ① . $a_{n-1}a_{n+2}=3+a_{n+1}a_n$ ②

② − ① $a_{n-1}a_{n+2}-a_{n-2}a_{n+1}=a_{n+1}a_n-a_na_{n-1}$

$a_{n-1}(a_n+a_{n+2}) = a_{n+1}(a_{n-2}+a_n)$ ③　　∵ $a_n>0$

∴由③可得 $\dfrac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n-2}+a_n}{a_{n-1}}$ ④　　设 $b_n=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}$ $(n\in Z_+)$

由④可得 $b_n=b_{n-2}$　∵ $a_4=5$.　∴ $b_1=b_2=3$　∴ $b_n=3$ $(n\in Z_+)$

∴ $\dfrac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=3$.　∴ $a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0$.

∴ $a_n=\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

6.　$a_4=9$.　$b_1=3$.　$b_2=5$　∴ $b_{2k-1}=3$.　$b_{2k}=5$.　$(k\in Z_+)$　代入 $b_n=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}$

∴ $3=b_{2k-1}=\dfrac{a_{2k-1}+a_{2k+1}}{a_{2k}} \Rightarrow a_{2k-1}+a_{2k+1}=3a_{2k}$ ①

$5=b_{2k}=\dfrac{a_{2k}+a_{2k+2}}{a_{2k+1}} \Rightarrow a_{2k}+a_{2k+2}=5a_{2k+1}$ ②

由①可得 $a_{2k}=\dfrac{1}{3}(a_{2k-1}+a_{2k+1})$ 代入② 可得

$\frac{1}{3}(a_{2k-1}+a_{2k+1})+\frac{1}{3}(a_{2k+1}+a_{2k+3})=5a_{2k+1}$

∴ $a_{2k+3}-13a_{2k+1}+a_{2k-1}=0$ $\quad a_{2k-1}=x_k$

同理 $a_{2k+2}-13a_{2k}+a_{2k-2}=0$ $\quad a_{2k}=y_k$

∴ 对任意 $n\in Z_+$ $\quad a_{n+4}-13a_{n+2}+a_n=0$.

由数学归纳法可知 a_n 为整数

7. 由第一个等式可得 $b_n=\frac{a_{n+1}-7a_n+3}{6}$ 代入第二个等式

$$\frac{a_{n+2}-7a_{n+1}+3}{6}=8a_n+7\cdot\frac{a_{n+1}-7a_n+3}{6}$$

∴ $a_{n+2}-14a_{n+1}+a_n+6=0$ 待定 α 则

$a_{n+2}-\alpha-14(a_{n+1}-\alpha)+a_n-\alpha=0$ $\quad$ 令 $12\alpha=6$ $\quad \alpha=\frac{1}{2}$

设 $A_n=a_n-\frac{1}{2}$ $\quad$ 则 $A_{n+2}-14A_{n+1}+A_n=0$

$\therefore A_n=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7-4\sqrt{3})^n$

$\therefore a_n=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})^n+\frac{1}{4}(7-4\sqrt{3})^n+\frac{1}{2}$

$=\left(\frac{(2+\sqrt{3})^n}{2}\right)^2+\left(\frac{(2-\sqrt{3})^n}{2}\right)^2+2\cdot\frac{(2+\sqrt{3})^n}{2}\cdot\frac{(2-\sqrt{3})^n}{2}$

$=\left(\frac{(2+\sqrt{3})^n}{2}+\frac{(2-\sqrt{3})^n}{2}\right)^2$

$\because \frac{(2+\sqrt{3})^n}{2}+\frac{(2-\sqrt{3})^n}{2}\in Z_+$ $\therefore a_n$为完全平方数

8 (1) $\because a_n>0$ $\therefore a_{n+1}\geq\frac{7a_n}{2}>a_n$ $\therefore \{a_n\}$单调递增

$\therefore 2a_{n+1}-7a_n=\sqrt{45a_n^2-36}$ $\therefore 4a_{n+1}^2+49a_n^2-28a_na_{n+1}=45a_n^2-36$

$\therefore a_{n+1}^2+a_n^2-7a_na_{n+1}+9=0$ ① $\therefore a_{n+2}^2+a_{n+1}^2-7a_{n+1}a_{n+2}+9=0$ ②

②−① 可得 $\underbrace{(a_{n+2}-a_n)}_{>0}(a_{n+2}+a_n-7a_{n+1})=0$

$\therefore a_{n+2}=7a_{n+1}-a_n$ 由数列的单调性知

a_n为正整数 (2) ∵由①可得 $a_{n+1}^2+a_n^2+2a_na_{n+1}=9(a_na_{n+1}-1)$

∴ $a_na_{n+1}-1=\left(\frac{a_n+a_{n+1}}{3}\right)^2$ ③

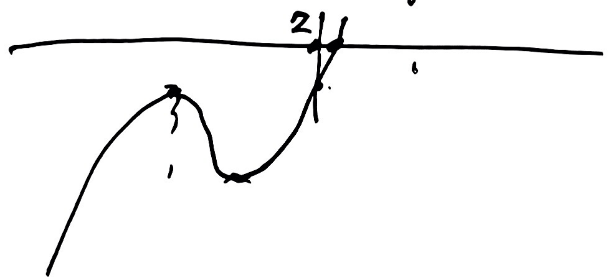
∵ $a_na_{n+1}-1\in\mathbb{Z}$. $\frac{a_n+a_{n+1}}{3}\in\mathbb{Q}$ ∴由③可知 $\frac{a_n+a_{n+1}}{3}\in\mathbb{Z}$,

∴由③可知 $a_na_{n+1}-1$为完全平方数

9. 设 $t=\lambda^{\frac{2}{3}}>0$ 则 $t^{\frac{3}{2}}=t+1$ ∴ $t^3=t^2+2t+1$ ①.

设 $f(x)=x^3-x^2-2x-1$ 则 $f'(x)=3x^2-2x-2$ 令 $f'(x)=0$ 得到

解 $x_1=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$. $x_2=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$



∴ $f(x_1)<0$ $f(2)<0$ ∴ $t>2$

设 $f(x)=0$ 的不同于 t 的一对共轭复根 ②

为 a . $\bar{a}$ 由韦达定理可得 $t+a+\bar{a}=1$.

$ta + t\bar{a} + a\cdot\bar{a} = -2$. $\quad ta\bar{a} = 1$

$$|a| = |\bar{a}| = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$$

设 $u_n = t^n + a^n + \bar{a}^n$. $(n=0,1,\cdots)$ 则由③得

$u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} - u_n = 0 \quad (n=0,1,\cdots)$ ③

$\therefore u_0 = 3$. $u_1 = t + a + \bar{a} = 1$. $u_2 = (t+a+\bar{a})^2 - 2(ta + t\bar{a} + a\cdot\bar{a})$

$= 1^2 - 2(-2) = 5$ 由③及数学归纳法可得 $u_n \in \mathbb{Z}_+$

取 $M = u_{450} \in \mathbb{Z}_+$ 则 $|M - \lambda^{300}| = |u_{450} - t^{450}|$

$= |a^{450} + \bar{a}^{450}| \le |a|^{450} + |\bar{a}|^{450} < 2\cdot\frac{1}{2^{\frac{450}{2}}} = \frac{1}{2^{224}}$

$< \frac{1}{2^{200}} = \frac{1}{4^{100}}$.

10 $a_n+a_{n+1}=2a_{n+2}a_{n+3}+2024$ ① ∴ $a_{n+1}+a_{n+2}=2a_{n+3}a_{n+4}+2024$ ②

② − ① 可得 $a_{n+2}-a_n=2a_{n+3}(a_{n+4}-a_{n+2})=\cdots\cdots=2^k a_{n+3}a_{n+5}\cdots a_{n+2k+1}(a_{n+2k+2}-a_{n+2k})$ ③

~~其中k为任意正整数~~

对任意正整数 n. 由③可得 $2^k \mid a_{n+2}-a_n$. k 为任意正整数.

∴ $a_{n+2}-a_n=0$. 设 $a_1=a_3=\cdots\cdots=a_{2t-1}=\cdots\triangleq a$ $a_2=a_4=\cdots=a_{2t}$

$\cdots\triangleq b$ $(t\in Z_+)$ 代入① 可得 $a+b=2ab+2024$

$2a+2b=2a\cdot 2b+4048$ ∴ $(2a-1)(2b-1)=-4047=-3\times19\times71$.

$2a-1=\pm1, \pm3, \pm19, \pm71, \pm57, \pm213, \pm1349, \pm4047$

∴ (a_1,a_2) 有16个可能取值.

11. $a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}=a_n+2024$ ① $a_{n+2}a_{n+3}+a_{n+3}=a_{n+1}+2024$ ②

② − ① 可得 $a_{n+2}a_{n+3}-a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$

$a_{n+2}(a_{n+3}-a_{n+1})+a_{n+3}-a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$

∴ $(a_{n+2}+1)(a_{n+3}-a_{n+1})=a_{n+2}-a_n$ ③，其中 $a_{n+2}+1\neq 0$.

若 $a_1=a_3$，由③可得 $a_2=a_4$，$a_3=a_5$ $\cdots$

∴ $a_1=a_3=\cdots=a_{2t-1}=\cdots\triangleq a$，$a_2=a_4=\cdots=a_{2t}=\cdots\triangleq b$.

$(t\in Z_+)$ 代入①可得 $ab=2024=2^3\cdot 11\cdot 23$

∴ $\{a_n\}$ 的个数为 $2\cdot(3+1)(1+1)(1+1)-2=30$.

若 $a_1\neq a_3$，由③可得 $a_2\neq a_4$，$a_3\neq a_5$ $\cdots$ —— 即2推但完

正整数 m 均有 $a_m\neq a_{m+2}$ ∴ $a_{n+3}-a_{n+1}\neq 0$，$a_{n+2}-a_n\neq 0$ $(n\in Z_+)$

由③可得 $|a_{n+2}-a_n|=|a_{n+2}+1|\,|a_{n+3}-a_{n+1}|\geq|a_{n+3}-a_{n+1}|$

正整数数列 $\{|a_{n+2}-a_n|\}$ 单调递减，∴ 存在正整数 N

当 $n \geq N$ 时 $|a_{n+2}-a_n| = c \in \mathbb{Z}_+$. c 为常数

①当 $|a_{n+2}+1| = 1$ $\therefore a_{n+2} \in \{0, -2\}$

②对于 $n \geq N+2$ 则 $a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \in \{0, -2\}$.

不满足①.