



学大伟业数学奥林匹克竞赛

授课讲义1

高中升学定制课程领先品牌



高一代数

1. 已知实数列 $a_1, a_2, \dots$, 对于每个正整数 n , 定义 m_n 是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的算术平均. 若存在实数 C , 使得对于任意两两不同的三元正整数组 (i, j, k) , 均有 $(i-j)m_k + (j-k)m_i + (k-i)m_j = C$, 证明 $a_1, a_2, \dots$ 是等差数列.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

2. 已知 $n^2 (n \geq 4)$ 个正数排成 n 行 n 列:

的数成等差数列, 每一列的数成等比数列, 并且所有公比相等, 已知 $a_{24} = 1, a_{42} = \frac{1}{8}, a_{43} = \frac{3}{16}$, 求 $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

3. 已知正整数 $n \geq 3$, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 互不相等, 考虑所有的 $a_i + a_j (1 \leq i < j \leq n)$,

并将这 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个数按递增的次序重新排列后为一个等差数列, 求 n 的值.

4. 对于正实数无穷数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{Z}^+)$, 若存在实数 $q > 1$, 使得对于任意的 $n \in \mathbb{Z}^+$, 均

有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“ L 数列”; 若存在实数 $r > 1$, 使得对于任意的正实数 x ,

区间 (x, rx) 中至多包含数列 $\{a_n\}$ 中的一项, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“ S 数列”, 问 (1) L 数列是否必为 S 数列; (2) S 数列是否必为 L 数列.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$, 对于正整数 $n \geq 3$, 有 $a_{n+1} = \frac{3 + a_n a_{n-1}}{a_{n-2}}$, 求 a_n .

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$, 对于正整数 n , 有 $a_{n+3} = \frac{a_{n+1} a_{n+2} + 7}{a_n}$, 证明

对于所有的正整数 n , a_n 是整数.

7. 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_0 = 1, b_0 = 0$, 且 $\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3, \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4, \end{cases} n = 0, 1, 2, \dots$, 证明

$a_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 是完全平方数.

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0 = 1$, 对于整数 $n \geq 0$, 有 $a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}$, 证明 (1) 对于

任意整数 $n \geq 0$, a_n 为正整数; (2) 对于任意整数 $n \geq 0$, $a_n a_{n+1} - 1$ 为完全平方数。

9. 若正实数 λ 满足 $\lambda = \lambda^{\frac{2}{3}} + 1$, 证明存在正整数 M , 使得 $|M - \lambda^{100}| < \frac{1}{4^{100}}$ 。

10. 已知整数数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) 满足: 对于任意正整数 n ,

$a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2024$, 求 a_1, a_2 的所有可能的值。

11. 求整数数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的数目, 使得对于每个正整数 n , 都有

$$a_n \neq -1, a_{n+2} = \frac{a_n + 2024}{a_{n+1} + 1}.$$

12. 设 $f(n)$ 为正整数 $1, 2, \dots, n$ 的排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的个数, 且满足 $a_1 = 1$,

$|a_i - a_{i-1}| \leq 2$ ($i = 2, 3, \dots, n$), 求 $f(2024)$ 除以 4 的余数。

13. 实数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) 满足 $a_0 > \frac{1}{2}$, 且对于任意非负整数 n , 有

$a_{n+1} \geq a_n, b_{n+1} = a_n(b_n + b_{n+2})$, 证明数列 $\{b_n\}$ 有界。

14. 求所有的正实数 α , 使得存在无穷正实数数列 $\{x_n\}$, 满足对于任意的正整数 n , 均

有 $x_{n+2} = \sqrt{\alpha x_{n+1} - x_n}$ 。

15. 对于正整数 $k > 1$, 定义数列 $\{x_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$): $x_0 = 1, x_1 = k + 2$, 对于任意非负

整数 n , $x_{n+2} - (k+1)x_{n+1} + x_n = 0$, 证明存在无穷多个正整数 k , 使得这个数列中不含素数。

16. 已知数列 $\{x_n\}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) 满足: $x_1 = \frac{4}{3}$, 对于任意正整数 n , $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n^2 - x_n + 1}$, 证

明 $\sum_{k=1}^n x_k$ 化为最简分数后, 分子为完全平方数。

17. 若正整数数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) 满足对于任意正整数 n , $a_n < a_{n+1}$, 且 $a_{2n} = 2a_n$,

则称该数列为“倍增数列”。证明 (1) 若数列 $\{a_n\}$ 是倍增数列, 则对于任意一个大于 a_1 的素

数 p ，在数列 $\{a_n\}$ 中总有一项是 p 的倍数；(2) 若 p 为奇素数，则存在一个倍增数列 $\{a_n\}$ ，使得在数列 $\{a_n\}$ 中的每一项均不是 p 的倍数。

18. 求所有正整数 n ，使得存在 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ ，满足

$\sqrt{\sigma(1) + \sqrt{\sigma(2) + \sqrt{\dots + \sqrt{\sigma(n)}}}}$ 是一个有理数。

19. 已知非负实数 x, y, z 满足 $2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2$ ，证明 $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}$ 。

20. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 为不等于 10 的正整数，且满足 $\sum_{i=1}^m a_i = 10m$ ，证明

$$\left(\prod_{i=1}^m a_i\right)^{\frac{1}{m}} \leq 3\sqrt{11}.$$

21. 对于任意正实数 a, b, c, d ，证明

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} + \sqrt[4]{abcd}}{4} \leq \sqrt[4]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b+c+d}{4}}.$$

22. 已知正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) 满足 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i^4} = 1$ ，证明 $a_1 a_2 \cdots a_n \geq (n-1)^{\frac{n}{4}}$ 。

23. 已知正整数 $n \geq 3$ ，证明对于任意 n 个不全相同的实数对 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ (其中 $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$)，有

$$\left| \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left(\left(x_i - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{n} \right)^2 + \left(y_i - \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{n} \right)^2 \right).$$

24. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均为正实数，证明 $\sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{a_{i+1}^2 + 1}{a_i^2 + 1}}$ ，其中 $a_{n+1} = a_1$ 。

25. 对于任意正实数 x, y, z ，证明 $\sum \frac{x^2}{xy+z} \geq \frac{(\sum x)^3}{3 \sum x^2(y+1)}$ 。

26. 设正整数 $n \geq 2$ ，实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = n$ ，证明

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}.$$

27. 已知实数 $a, b, c \in [-1, 1]$ ，且满足 $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$ ，证明对于任意正整数 n ，

均有 $1+2(abc)^n \geq a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$ 。

28. 设 n 为正整数, 对于每个 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a_{ij} 为正实数, 且满足 $a_{ij}a_{ji}=1$ 。设

$$c_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} \quad (i=1, 2, \dots, n), \text{ 证明 } \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \leq 1。$$

29. 已知 x, y, z 为非负实数, 证明 $\sum \frac{x-y}{xy+2y+1} \geq 0$ 。

30. 已知正实数 a, b, c 满足 $a+b+c=abc$, 证明 $\sum \frac{a}{a^2+1} \leq \frac{\sqrt{abc}}{3\sqrt{2}} \cdot \sum \frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1}$ 。

31. 已知正实数 x, y 满足 $x+y=1$, 对于任意正整数 $n \geq 2$, 证明

$$\frac{x^n}{x+y^3} + \frac{y^n}{y+x^3} \geq \frac{2^{4-n}}{5}。$$

32. 设正实数 a, b, c 满足 $abc=1$, 证明 $\sum \frac{a^6}{(a-b)(a-c)} > 15$ 。

33. 若实数 a, b, c 满足 $0 < a, b, c < \frac{1}{2}$, 且 $a+b+c=1$, 证明对于任意实数 x, y, z , 有

$$abc \left(\sum x \right)^2 \geq \sum ayz (1-2a)。$$

34. 设 $S_r(n) = 1^r + 2^r + \dots + n^r$, 其中 r 是有理数, n 是正整数, 求所有三元数组 (a, b, c) , 其中 a, b 是正有理数, c 是正整数, 使得存在无穷多个正整数 n , 满足 $S_a(n) = (S_b(n))^c$ 。

35. 已知函数 $f(x) = \frac{2x}{ax+b}$, $f(1)=1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$, 若 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, (1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式; (2) 证明 $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} > \frac{1}{2e}$ 。

36. 已知 a, b, c 为非负实数, 证明 $3 \sum a^2 \geq \sum a \sum \sqrt{bc} + \sum (a-b)^2 \geq (\sum a)^2$ 。

37. 已知正整数 a_i, b_i 满足 $0 < \frac{a_i}{b_i} < 1$, 其中 $i=1, 2, \dots, n$ 。若对于 $1 \leq i < j \leq n$, $a_i \neq a_j$

与 $b_i \neq b_j$ 中至少有一个成立, 则称 $\frac{a_i}{b_i}$ 与 $\frac{a_j}{b_j}$ “形式互异”; 若 $\frac{a_i}{b_i} \neq \frac{a_j}{b_j}$, 则称 $\frac{a_i}{b_i}$ 与 $\frac{a_j}{b_j}$ “本

质互异”。证明 (1) 若 $\frac{a_i}{b_i} (i=1, 2, \dots, n)$ 两两形式互异，则 $\sum_{i=1}^n b_i \geq \frac{2\sqrt{2}}{3} n^{\frac{3}{2}}$ ；(2) 若

$\frac{a_i}{b_i} (i=1, 2, \dots, n)$ 两两本质互异，则 $\sum_{i=1}^n b_i \geq 2 \left(\frac{2n}{3} \right)^{\frac{3}{2}}$ 。

38. 已知实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$ ，证明 $\sum \frac{33a^2-a}{33a^2+1} \geq 0$ 。

39. 证明对于任意正整数 n ，有 $\sum_{i=1}^n \left[\sqrt[3]{\frac{n}{i}} \right] < \frac{5n}{4}$ 。

40. 对于给定的正整数 $n \geq 2$ ，正数数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $a_k \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$ ，其中

$k=2, 3, \dots, n$ ，求 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ 的最大值。

41. 若实数 x, y, z ，满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，求 $(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$ 的最大值。

42. 对于满足 $\sum_{i=1}^{2024} x_i = 2023$ 非负实数 $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ ，求 $\sum_{i=1}^{2024} x_i^i$ 的最小值。

43. 对于任意实数 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in [0, 1]$ ，求 $\prod_{1 \leq i < j \leq 5} |a_i - a_j|$ 的最大值。

44. 已知实数 x, y, z 满足 $x, y, z \notin (-1, 1)$ ，且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x + y + z = 0$ ，求 $x + y + z$ 的

最大值。

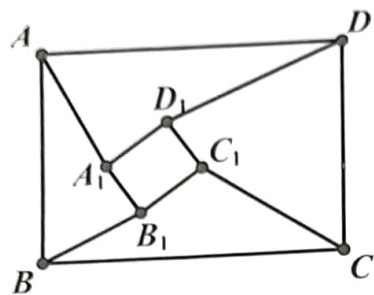
45. 若正实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$ ，求实数 k 的最小值，使得对于任意正实数 x, y, z ，

均有 $\frac{x^2 y^2}{1-z} + \frac{y^2 z^2}{1-x} + \frac{z^2 x^2}{1-y} \leq k - 3xyz$ 。

高中几何竞赛讲义

例 1、(相似中心)

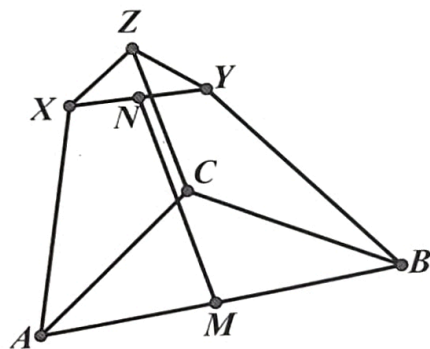
如图, 矩形 $ABCD$ 与矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 顺相似, 求证: $AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$ 。



类题:

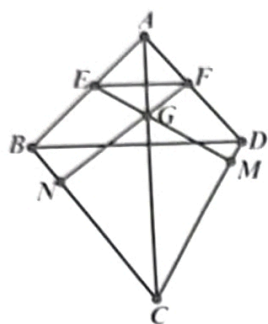
1、设 $ABCDEF$ 与 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 是两个顺相似的正六边形。求证:
 $AA_1^2 + CC_1^2 + EE_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2 + FF_1^2$ 。

2、如图, $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$, 且 $AC=BC$, $XZ=YZ$, $AX=BY$, M 、 N 分别为 AB 、 XY 中点, 求证: $CZ \parallel MN$ 。



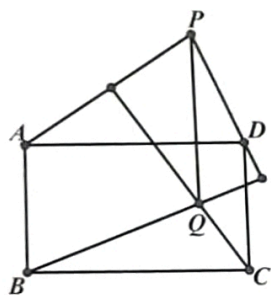
例 2、(特殊化)

如图, 在凸四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别为边 AB 、 AD 上的点, $EF \parallel BD$, 过点 E 作 $EM \perp CD$ 于 M , 过点 F 作 $FN \perp BC$ 于 N , 且 EM 、 FN 、 AC 相交于同一点 G , 求证: $AC \perp BD$ 。

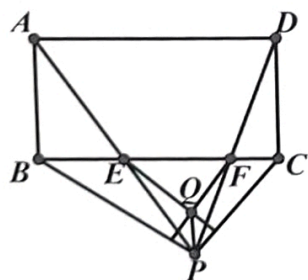


类题：

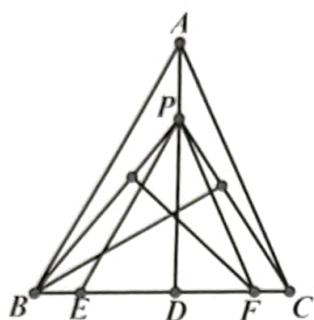
- 1、如图，设 P 是矩形 $ABCD$ 所在平面上的一点，过点 B 引 PD 的垂线，过点 C 引 PA 的垂线，它们交于点 Q 。求证：若 P 与 Q 不重合，则 $PQ \perp AD$ 。（第 17 届俄罗斯数学奥林匹克，1991）
注： BC 在 AD 上方也成立。



- 2、如图，设 P 为矩形 $ABCD$ 所在平面上不在矩形的外接圆上的任意一点，直线 PA 、 PD 与 BC 分别交于 E 、 F ，过点 E 且垂直于 PC 的直线与过点 F 且垂直于 PB 的直线交于 Q 。求证： $PQ \perp BC$ 。



- 3、如图，设 P 是 $\triangle ABC$ 的高 AD 上一点，过 P 作 AB 、 AC 的平行线分别交 BC 于 E 、 F 。求证：过点 E 且垂直于 PC 的直线与过点 F 且垂直于 PB 的直线交于 AD 上。



例 3、(特殊化)

O 是 $\triangle ABC$ 的外心, D, E, F 分别在 BC, CA, AB 上, 且 $DF=BF, DE=CE$ 。求

证: A, E, O, F 四点共圆。

类题:

1、 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, D, E, F 分别在 BC, CA, AB 上, 且 $BF=BD, CE=CD$ 。

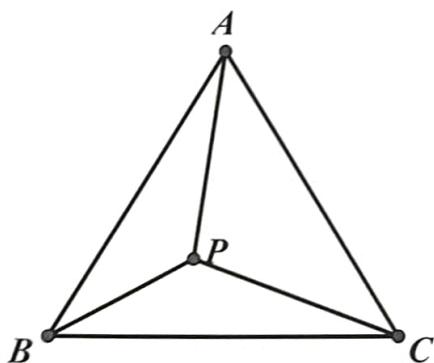
求证: A, E, I, F 四点共圆。(旁心类似)

2、 H 是 $\triangle ABC$ 的外心, D, E, F 分别在 BC, CA, AB 上, 且 $DF=BD, DE=CD$ 。

求证: A, E, H, F 四点共圆。

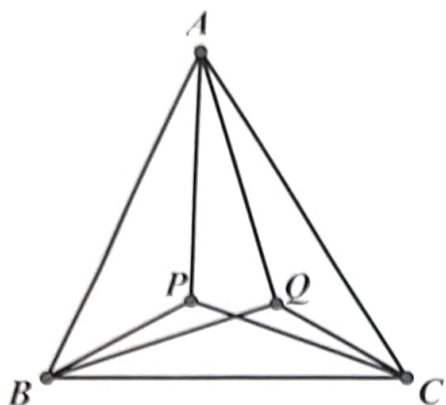
例 4、(对称构造)

P 为等边三角形 ABC 内一点, 已知 $PA=a, PB=b, PC=c$, 求三角形 ABC 的面积。

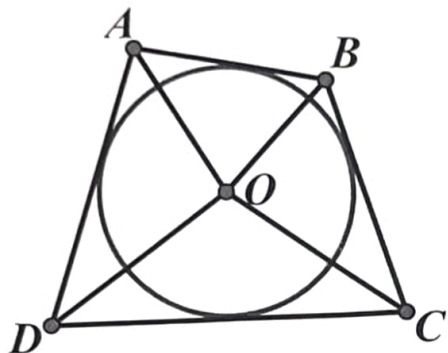


类题:

1、 P, Q 为三角形 ABC 的等角共轭点, 求证: $\frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} + \frac{BP \cdot BQ}{AB \cdot BC} + \frac{CP \cdot CQ}{BC \cdot AC} = 1$ 。



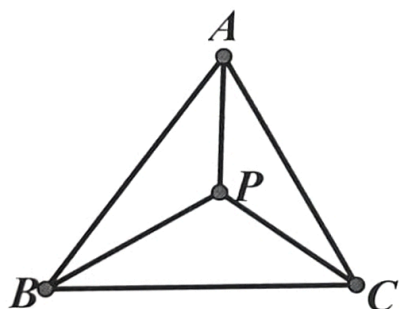
2、四边形 $ABCD$ 外切于圆 O ， $AB=a$ ， $BC=b$ ， $CD=c$ ， $DA=d$ ，求证：
 $OA \cdot OC + OB \cdot OD = \sqrt{abcd}$ 。



例 5、（复数法）

P 为三角形 ABC 内一点，求证：

$$AP \cdot BP \cdot AB + BP \cdot CP \cdot BC + CP \cdot AP \cdot CA \geq AB \cdot BC \cdot CA。$$



类题：

P 为三角形 ABC 内一点，求证： $AP^2 \cdot BC + BP^2 \cdot CA + CP^2 \cdot AB \geq AB \cdot BC \cdot CA$ 。



例 6、（三角形欧拉定理）

$$R^2 - d^2 = 2Rr. \quad \left(\text{即 } \frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r} \right)$$

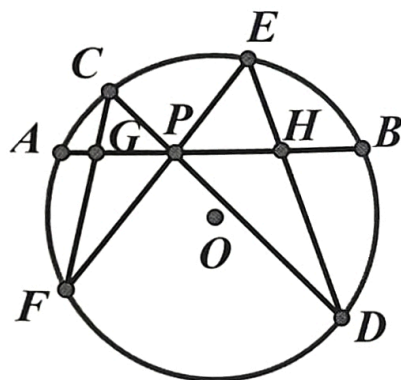
类题：

1、内切圆改为旁切圆。

2、三角形改为双圆四边形： $\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}$ 。

例 7、（面积方法）

蝴蝶定理、凯迪定理



证明：设 $\angle ABD = x$ ，易知

$$2S_{\triangle ANI} = S_{\triangle ABI} - S_{\triangle ACI}$$

$$2S_{\triangle AMI} = S_{\triangle ADI} - S_{\triangle AEI}$$

于是原命题等价于：

$$S_{\triangle ANI} = S_{\triangle AMI}$$

$$S_{\triangle ABI} - S_{\triangle ACI} = S_{\triangle ADI} - S_{\triangle AEI}$$

$$S_{\triangle ABI} + S_{\triangle AEI} = S_{\triangle ACI} + S_{\triangle ADI}$$

$$S_{\text{四边形}ABIE} = S_{\text{四边形}ACID}$$

$$S_{\triangle ICE} + S_{\triangle ADB} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle BDI}$$

$$S_{\triangle ADB} - S_{\triangle ACE} = S_{\triangle BDI} - S_{\triangle ICE}$$

$$\begin{aligned} AB \cdot BD \cdot \sin x - AC \cdot CE \cdot \sin x \\ = BI \cdot (BD \cdot \sin(B + 2x) - CE \cdot \sin \end{aligned}$$

而

$$BI = \frac{\frac{BC}{2}}{\cos x} = \frac{BC}{2 \cos x}$$

故上式等价于

$$\sin x (AB \cdot BD - AC \cdot CE)$$

$$= \frac{BC}{2 \cos x} (BD \cdot \sin(B + 2x) - CE \cdot \sin(B + 2x))$$

$$BD(AB \cdot \sin 2x - BC \cdot \sin(B + 2x))$$

$$= CE(AC \cdot \sin 2x - BC \cdot \sin(C + 2x))$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b \sin 2x - a \sin(C + 2x)}{c \sin 2x - a \sin(B + 2x)}$$

$$c^2 \sin 2x - ac(\sin B \cos 2x + \cos B \sin 2x)$$

$$= b^2 \sin 2x - ab(\sin C \cos 2x + \cos C \sin 2x)$$

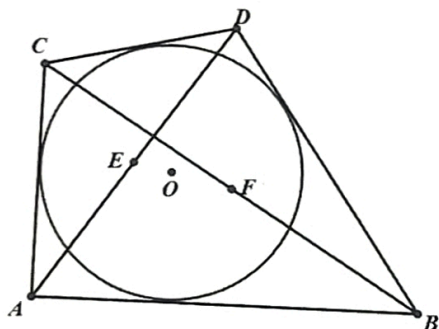
$$\sin 2x(c^2 - b^2) = a \sin 2x(c \cos B - b \cos C)$$

$$\frac{c^2 - b^2}{a} = c \cos B - b \cos C$$

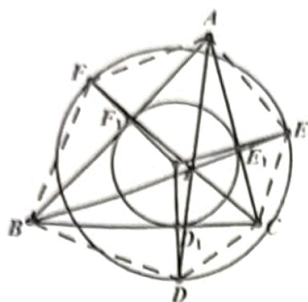
由余弦定理显然。

面积法证题

证明：E、O、F共线。



如图, I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 内切圆与三边的切点分别为 D_1, E_1, F_1 , 以 I 为圆心作圆, 交 ID_1, IE_1, IF_1 于 D, E, F , 求证: AD, BE, CF 相交于一点。



$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} \cdot \frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABC}} \cdot \frac{S_{\triangle CAF}}{S_{\triangle ABC}} = 1$$

$$\frac{AB \cdot BD \sin \angle ABD}{AC \cdot CD \sin \angle ACD} \cdot \frac{BC \cdot CE \sin \angle BCE}{AB \cdot BE \sin \angle ABE} \cdot \frac{AC \cdot AF \sin \angle CAF}{BC \cdot DF \sin \angle CBF} = 1$$

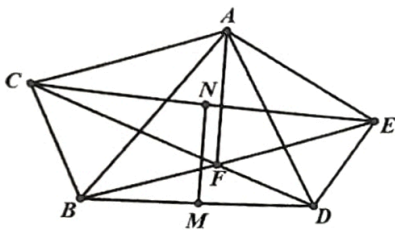
$$\frac{AB \cdot BD \sin \angle ABD}{AC \cdot CD \sin \angle ACD} \cdot \frac{BC \cdot CE \sin \angle BCE}{AB \cdot BE \sin \angle ABE} \cdot \frac{AC \cdot AF \sin \angle CAF}{BC \cdot DF \sin \angle CBF} = 1$$

由 $\triangle ABD \cong \triangle BCE$ 得 $\angle ABD = \angle BCE$;

$$\angle CBD = \angle FCB \Rightarrow \angle ABD = \angle ACF$$

同理可证。

如图, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, M, N 分别为 BD, CE 的中点, CD, BE 交于 F , 求证: $MN \parallel AF$ 。



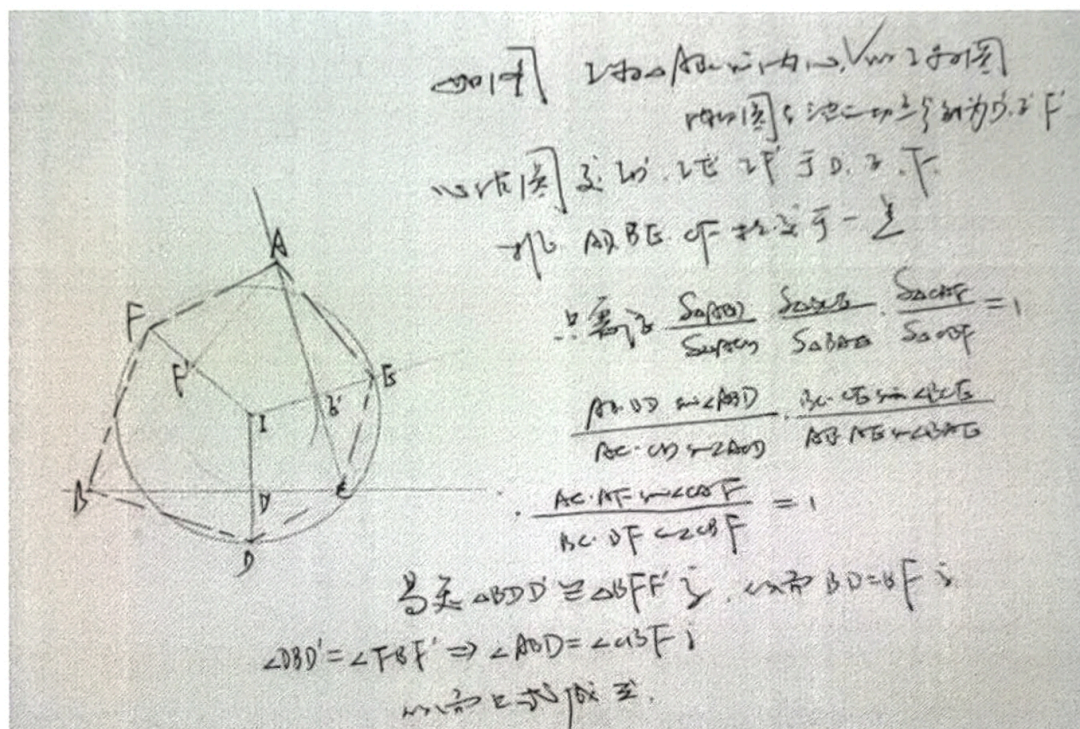
分析思路:

$$\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle FMN \quad (\text{已证})$$

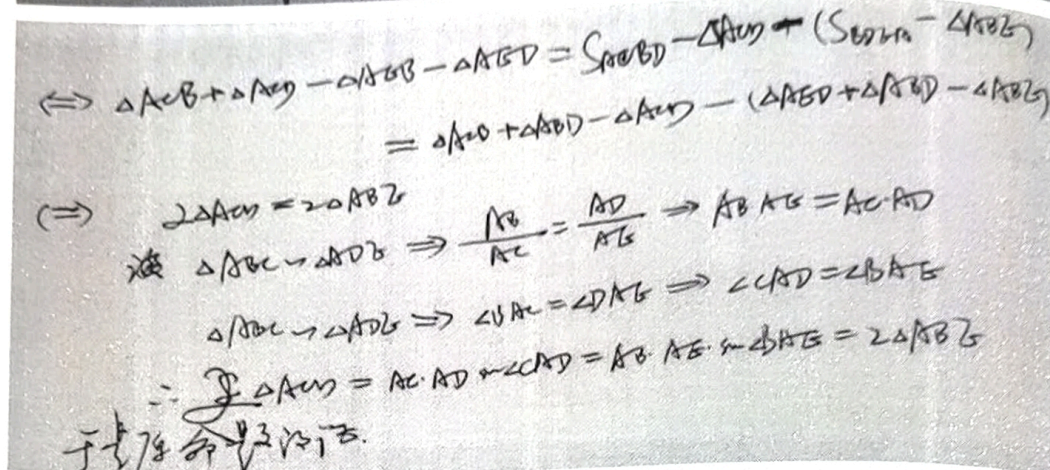
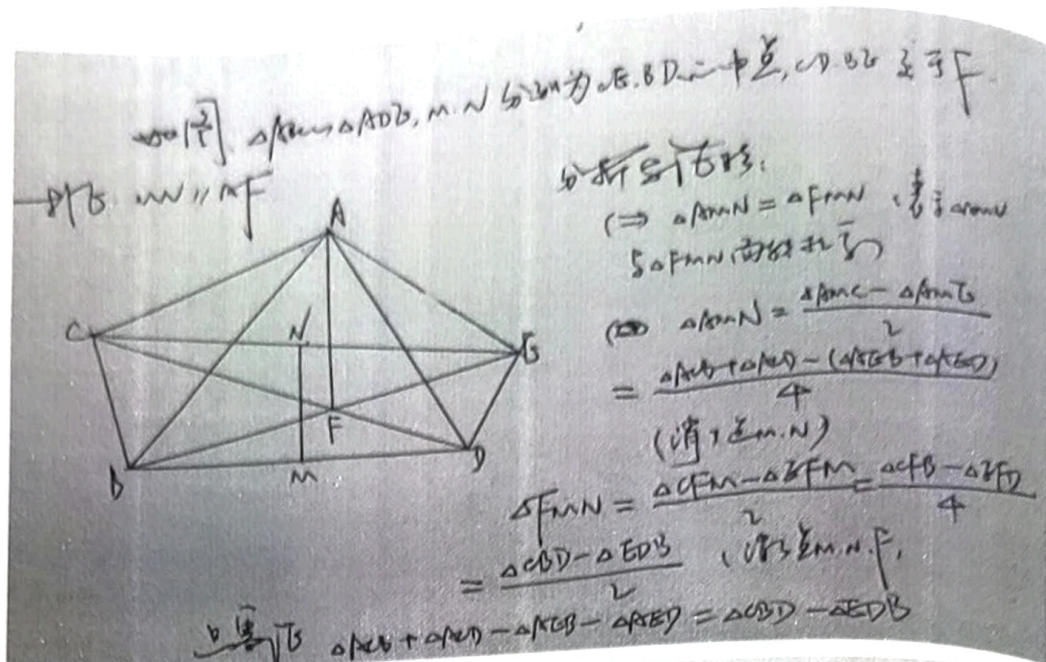
$$\begin{aligned} \triangle AMN &= \frac{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE}}{2} \\ &= \frac{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADE} - (S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACD})}{2} \\ &= \frac{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ACD}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta FMN &= \frac{\Delta CFM - \Delta CFN}{2} = \frac{\Delta CFB - \Delta CFB}{4} \\ &= \frac{\Delta CBD - \Delta CDB}{4} \quad (\text{消去 } M, N, F) \\ \therefore \sqrt{3} \Delta ACB + \Delta ACD - \Delta ADB - \Delta ABD &= \Delta CBD - \Delta CDB \\ &= S_{ACBD} - S_{ACDB} - (S_{BDA} - S_{ABD}) \\ \Rightarrow \Delta ACB + \Delta ACD - 2\Delta ADB - \Delta ABD &= \\ S_{ACBD} - S_{BDA} &= S_{ACB} + S_{ACD} - (S_{ADB} \\ + S_{ABD}) &= S_{ACBC} - S_{ADDB} \\ \Leftrightarrow \Delta ACB + \Delta ACD &= \Delta ADB \\ \Leftrightarrow AC \cdot AD \sin \angle CAD &= AB \cdot AD \sin \angle BAD \\ \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} &= \frac{AD}{AD} \quad \text{即 } AC = AD\end{aligned}$$

知识点：塞瓦定理，基本方法：面积法

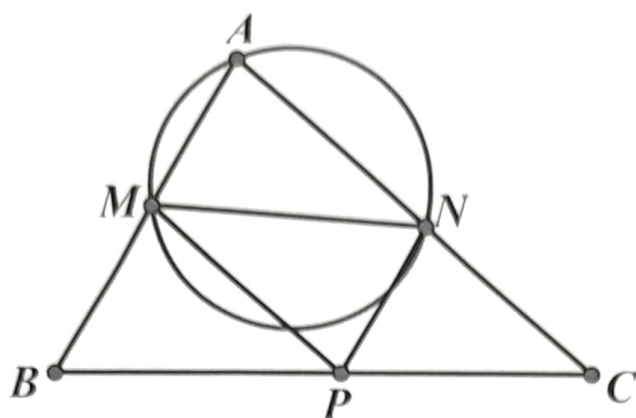


基本方法：面积法，消点法



例 8、(定点、定值问题)

任意 $\triangle ABC$, P 为 BC 边上的动点, 作 $PN \parallel BA$, $PM \parallel AC$, 求证: $\triangle AMN$ 的外接圆过一定点 (非 A 点).



我的解答:

他人解答:

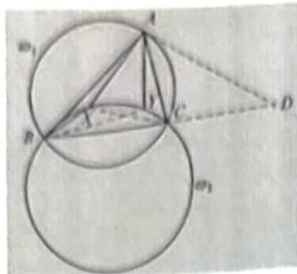
证明: 过B, C作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线交于Q,
连接AQ, 与 $\triangle BQC$ 外接圆另交于点K.
则K为定点, 即所求.
下证: A, M, K, N四点共圆.
先证明: $\triangle KAB \sim \triangle KCA$.
 $\because B, K, C, Q$ 共圆, $BQ = CQ$
 $\therefore \angle BKQ = \angle CKQ, \therefore \angle AKB = \angle ACK$.
又 $\angle ACK = \angle ACB - \angle BCK = \angle ACB - \angle BQK$
 $= \angle ACB - (180^\circ - \angle ABQ - \angle BAK)$
 $= \angle ACB - 180^\circ + \angle ABQ + \angle BAK$
 $= \angle ACB - 180^\circ + (\angle ABC + \angle QBC) + \angle BAK$
 $= \angle ACB - 180^\circ + (\angle ABC + \angle BAC) + \angle BAK$
 $= \angle BAK$
 $\therefore \triangle KAB \sim \triangle KCA$.
 $\because PM \parallel AC, PN \parallel AB$
 $\therefore \frac{AM}{MB} = \frac{PC}{PB} = \frac{CN}{NA}, \therefore M, N$ 为相似对应点.
 $\therefore \angle AMK = \angle CNK, \therefore A, M, K, N$ 四点共圆.

(2023.12.26)
高航 (航家数学)

航家数学

类题:

1、在锐角三角形 ABC 中，点 X, Y 是三角形 ABC 内部两个互异的动点，且满足 B, C, X, Y 四点共圆及 $\angle AXB - \angle ACB = \angle AYC - \angle ABC$ 。证明：直线 XY 经过一个定点。



证明：如图，设过点 A 的 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线与 BC 的延长线交于点 D 。设三角形 AXY 的外接圆为 ω ，三角形 ABC 的外接圆为 ω_1 ， $BCXY$ 的外接圆为 ω_2 。

由 $\angle AXB - \angle ACB = \angle AYC - \angle ABC$ 得
 $360^\circ - \angle AXC - \angle CXB - \angle ACX - \angle BCX = 360^\circ - \angle AYB - \angle CYB - \angle ABY - \angle CBY$ ，
 即
 $360^\circ - (180^\circ - \angle XAC) - (180^\circ - \angle XBC) = 360^\circ - (180^\circ - \angle BAY) - (180^\circ - \angle BCY)$ 。

所以

$$\begin{aligned} \angle CAX + \angle CBX &= \angle BAY + \angle BCY. \\ \angle YAD &= \angle BAD - \angle BAY \\ &= \angle ACD - (\angle CAX + \angle CBX - \angle BCY) \\ &= \angle ABC + \angle BAC - \angle CAX - \angle CBX + \angle BCY \\ &= \angle ABX + \angle BAX + (180^\circ - \angle BXY) \\ &= \angle AXY. \end{aligned}$$

所以 AD 是三角形 AXY 的外接圆 ω 的切线，于是直线 AD 是 ω_1 与 ω 的根轴，又因

为直线 XY 是 ω 与 ω_2 的根轴，直线 BC 是 ω_1 与 ω_2 的根轴，则由根心定理，知 AD 、

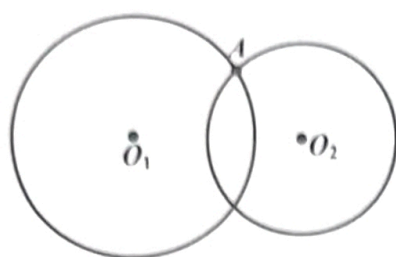
XY 、 BC 三线共点，即直线 XY 过点 D 。

注：取 $X=C, Y=B$ 可猜出 D 在 BC 上，导角得圆 ABC 与圆 AXY 相切，再利用根心定理知结论成立。

取 $X=C, Y=B$ 可猜出 D 在 BC 上，再让 X, Y 在切线上趋于 A 点，则可以知道 D 在圆 ABC 过 A 的切线上，这样就知道 D 点的确切位置了，解题就有了明确的方向。

2、如图，平面上的两个圆相交， A 是其中一个交点。现有两质点同时从 A 出发各自以恒定的速度，同以顺时针方向或同以逆时针方向绕各自的圆移动，在绕过一周之后这两点又同时回到了 A 点。求证：在这个平面上一定存在某个固定的点 P 使得在任意时刻 P 点都与这两动点的距离相等。（1979 年年第 21 届 IMO 第 3

题)



3、在平面上给定 $\triangle ABC$ ，设 D 、 E 、 F 分别是边 BC 、 CA 、 AB 上的动点，满足 $BD=CE$ ， $CD=BF$ ，过 B 、 D 、 F 三点的圆与过 C 、 D 、 E 三点的圆交于 D 及另一点 P 。证明：平面上存在一点 Q ，使得 PQ 的长度为定值。

4、给定凸四边形 $ABCD$ ， $BC=AD$ ，且 BC 不平行于 AD 。设点 E 和 F 分别在边 BC 和 AD 的内部，满足 $BE=DF$ 。直线 AC 和 BD 相交于点 P ，直线 BD 和 EF 相交于点 Q ，直线 AC 和 EF 相交于点 R 。证明：当点 E 和 F 变动时， $\triangle PQR$ 的外接圆经过除点 P 外的另一个定点。

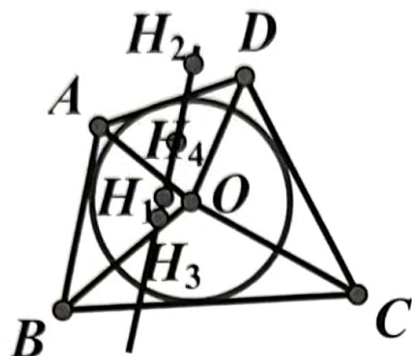
5、(2018年莫斯科竞赛九年级) $ABCD$ 是给定的对边不平行的凸四边形， P 是 AD 边上不同于 A 和 D 的动点， $\triangle ABP$ 的外接圆和 $\triangle CDP$ 的外接圆的另一交点为 Q ($Q \neq P$)。求证：当 P 在 AD 边上变化时，直线 PQ 过定点。

例 9、(四点共圆、四点共线等)

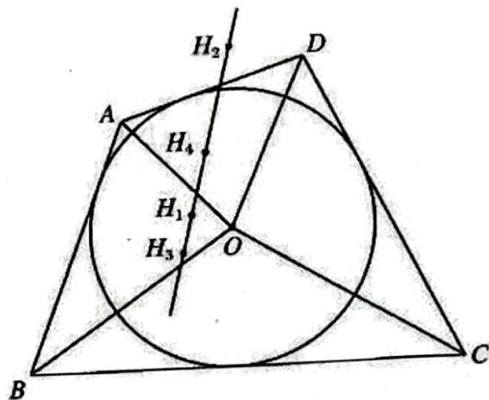
圆内接四边形三组对边的交点与圆心构成垂心组。

类题：

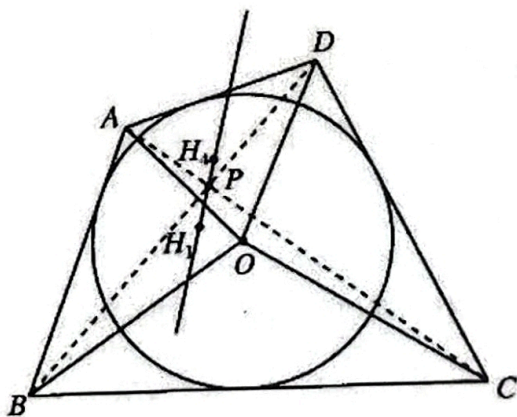
如图，四边形 $ABCD$ 是圆外切四边形，内切圆圆心为 O 。 H_1 、 H_2 、 H_3 、 H_4 分别是 $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle COD$ 、 $\triangle DOA$ 的垂心，求证： H_1 、 H_2 、 H_3 、 H_4 四点共线。



解答：如图，四边形 $ABCD$ 是圆外切四边形，内切圆圆心为 O ， H_1 、 H_2 、 H_3 、 H_4 分别是 $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle COD$ 、 $\triangle DOA$ 的垂心，求证： H_1 、 H_2 、 H_3 、 H_4 四点共线。



如图，设对角线 AC 与 BD 交于点 P ，我们证明 H_1 、 H_2 、 H_3 、 H_4 、 P 五点共线。这只需证明 H_1 、 H_4 、 P 共线，因为同理会有 H_1 、 H_2 、 P 和 H_3 、 H_4 、 P 分别共线。



因为 $DH_4 \perp AO$ ， $BH_1 \perp AO$ ，所以 H_1 、 H_4 、 P 共线等价于 $\frac{DH_4}{BH_1} = \frac{DP}{BP}$ 。记 $\angle OAB = \alpha$ ， $\angle OBC = \beta$ ， $\angle OCD = \gamma$ ， $\angle ODA = \delta$ ，并不妨设 $\odot O$ 半径为 1。则由垂心的性质，

$$DH_4 = 2R_4 \cos \delta = \frac{AO}{\tan \delta} = \frac{1}{\sin \alpha \tan \delta},$$

其中 R_4 是 $\triangle DOA$ 外接圆的半径.

同理 $BH_1 = \frac{1}{\sin \alpha \tan \beta}$, 这样 $\frac{DH_4}{BH_1} = \frac{\tan \beta}{\tan \delta}$.

熟知 $AB = \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$, 再注意到 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$, 我们有

$$\frac{DP}{BP} = \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD \cdot DC \cdot \sin 2\delta}{AB \cdot BC \cdot \sin 2\beta} = \frac{\frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin \alpha \sin \delta} \cdot \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin \gamma \sin \delta} \cdot 2\sin \delta \cos \delta}{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \cdot \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} \cdot 2\sin \beta \cos \beta} = \frac{\tan \beta}{\tan \delta},$$

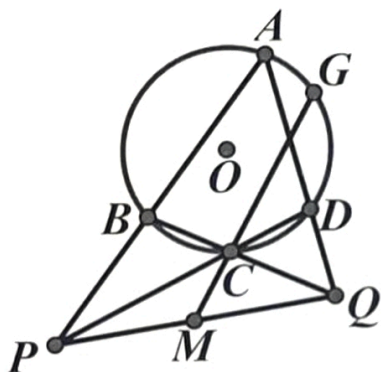
故 $\frac{DH_4}{BH_1} = \frac{DP}{BP}$ 成立.

四点共圆

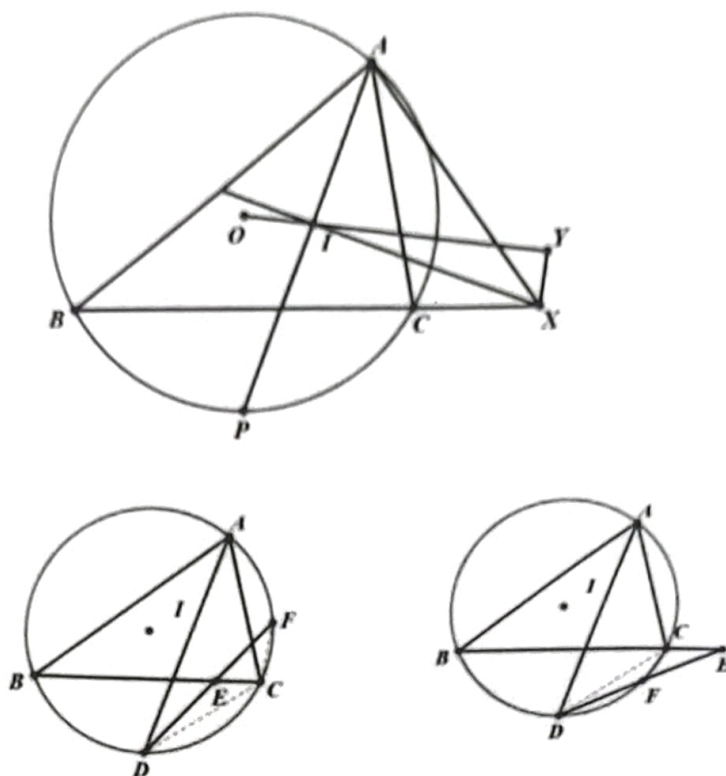
引入第五点

、如图, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O , 对边 AB, DC 交于点 P ; AD, BC 交于点 Q .

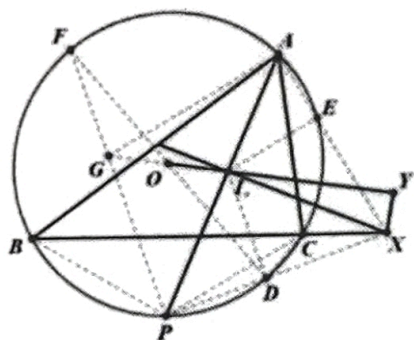
M 是 PQ 的中点, MC 交圆 O 于另一点 G . 求证 A, G, P, Q 四点共圆.



$\triangle ABC$ 中, O 为外心, I 为内心, 直线 AI 与外接圆交于点 P , 过 I 且垂直于 AI 的直线交 BC 延长线于 X , X 在 OI 上的射影为 Y . 求证: A, P, X, Y 四点共圆.



分析:本题中,观察到 P 为角平分线与外接圆的交点,即“南极点”,我们可以考虑南极点的以下性质:如图所示,设 $\angle A$ 的平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 D (南极点),过 D 作弦 DF 与弦 BC 所在直线交于 E ,则 $DI^2=DE \cdot DF$ (有 E 在 BC 上,极点在 BC 的延长线上两种情形),因而我们可以考虑连接 XP 、 XA ,考虑与圆的交点。



证明:连接 PX 另外与圆 O 交于 D ,连接 AX 另外与圆 O 交于 E ,连接 ID 、 IE 、 CP 、 BP 、 CD 。

因为 $\angle CDX = \angle XBP = \angle BCP$, 则 $\angle CDP = \angle PCX$, 则 $\triangle PCD$ 相似符号 $\triangle PXC$, 则 $PC^2 = PD \cdot PX$ 。由鸡爪定理, $PI = PC$, 则 $PI^2 = PD \cdot PX$ 。则 $\triangle PID$ 相似符号 $\triangle PXI$, 则 $\angle PDI = \anglePIX = 90^\circ$, 又 $XE \cdot XA = XD \cdot XP = XI^2$, $\triangle XIE$ 相似符号 $\triangle XAI$, 则 $\angle IEX = \angle AIX = 90^\circ$ 。

倍长 IO 至 G , 连接 AG 、 GP , D 对径点为 F , 则 $\triangle OFG \cong \triangle ODI$, 则 $FG \parallel ID$,

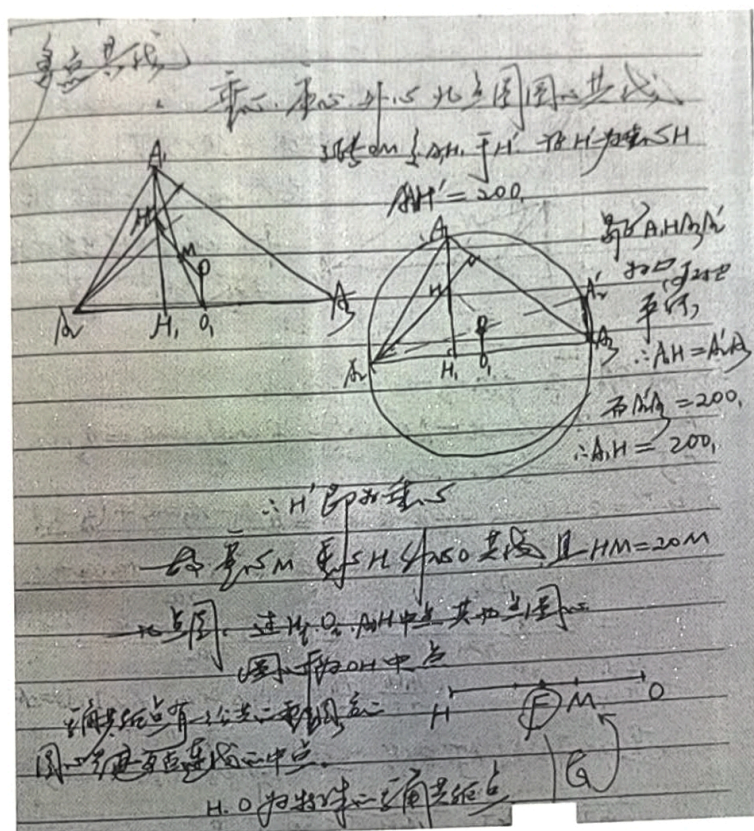
例 10、(利用位似证明三点共线)

(三角形欧拉线)

类题:

1、三角形的界心、重心、内心三心共线，且界心到重心的距离是内心到重心距离的两倍。

共线



2. 证明: $AN \perp IN$ 且 $AM = 2IM$

证: $AN = 2IM$ 且 $AM = 2IM$
 证: $IO \perp A_1J$
 考虑 $\triangle A_1H_1I$ 与 $\triangle IJ_1O$ 相似
 可得: $\frac{A_1H_1}{II} = \frac{IJ_1}{IO}$

$$\frac{A_1H_1}{II} = \frac{2S}{a_1} = \frac{2S'}{a_1 r} = \frac{2p}{a_1}$$

$$IO = A_1J - IJ_1 = a_1 - \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3) = \frac{1}{2}(a_1 - a_2)$$

$$\therefore A_1H_1 = A_1I \cos 2\alpha_1 = A_1I \sin \alpha_2 = 2R \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 = a_2 \cos \alpha_1$$

$$A_2J_1 = A_1I_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)$$

$$\therefore IJ_1 = a_1 - a_2 \cos \alpha_1 - \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3) = \frac{a_1 - 2a_2 \cos \alpha_1 + (a_3 - a_1)}{2}$$

$$= \frac{a_1^2 - 2a_1 a_2 \cos \alpha_1 + a_2^2 + a_3(a_1 - a_2)}{2a_1} = \frac{a_1^2 - (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) + a_3(a_1 - a_2)}{2a_1}$$

$$= \frac{(a_1^2 - a_2^2) + a_3(a_1 - a_2)}{2a_1} = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2)}{2a_1}$$

$$\frac{IJ_1}{IO} = \frac{2p}{a_1} \quad \therefore \frac{A_1H_1}{II} = \frac{IJ_1}{IO} \quad \therefore \triangle IOI \sim \triangle A_1J_1I$$

$$\therefore IO \parallel A_1J_1$$

证: $AN \perp IN$ 且 $AM = 2IM$
 考虑 $\triangle A_1N'K$ 与 $\triangle IJ_1N$ 相似

$$\frac{A_1N'}{A_1J_1} = \frac{2IO}{A_1J_1} = \frac{2II}{A_1H_1} = 2 \cdot \frac{a_1}{2p} = \frac{a_1}{p}$$

$$\frac{A_1N'}{A_1J_1} = \frac{KJ_1}{A_2J_1} \quad \therefore \frac{A_1N'}{A_2J_1} = \frac{KJ_1}{A_2J_1}$$

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3) = \frac{KJ_1}{a_2}$$

$$KJ_1 = \frac{(a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)}{2a_2}$$

$$A_1K = A_1J_1 - KJ_1 = a_2 - \frac{(a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)}{2a_2}$$

No. _____ Date _____

$$= \frac{\phi a_1 a_2 - (a_1 + a_2 - a_3)(a_1 + a_2 - a_3)}{4a_1} + \frac{(a_1 + a_2 - a_3)(a_1 + a_2 - a_3)}{4a_1}$$

$$\frac{AN}{AJ_1} = \frac{AJ_2}{AK} = \frac{a_2 - \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)}{\frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)} = \frac{\frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)}{\frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)}$$

所以 $\frac{AN}{AJ_1} = \frac{AJ_2}{AK}$ 所以 N, J_1, J_2, K 四点共线

$$\frac{J_2 K}{J_2 A_3} = \frac{AJ_1}{AA_3} = \frac{J_2 K}{\frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)} = \frac{\frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)}{a_1}$$

$$J_2 K = \frac{1}{4} \frac{(a_1 + a_2 - a_3)(a_1 + a_2 - a_3)}{a_1}$$

$$AJ_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3) \quad AK = \frac{(a_1 + a_2 - a_3)(a_1 + a_2 - a_3)}{4a_1} + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3)$$

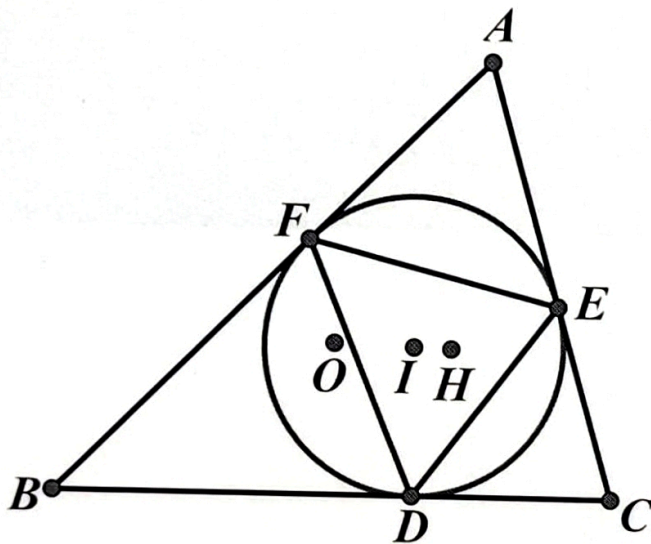
$$= \frac{(a_1 + a_2 - a_3)(a_1 + a_2 - a_3)}{4a_1}$$

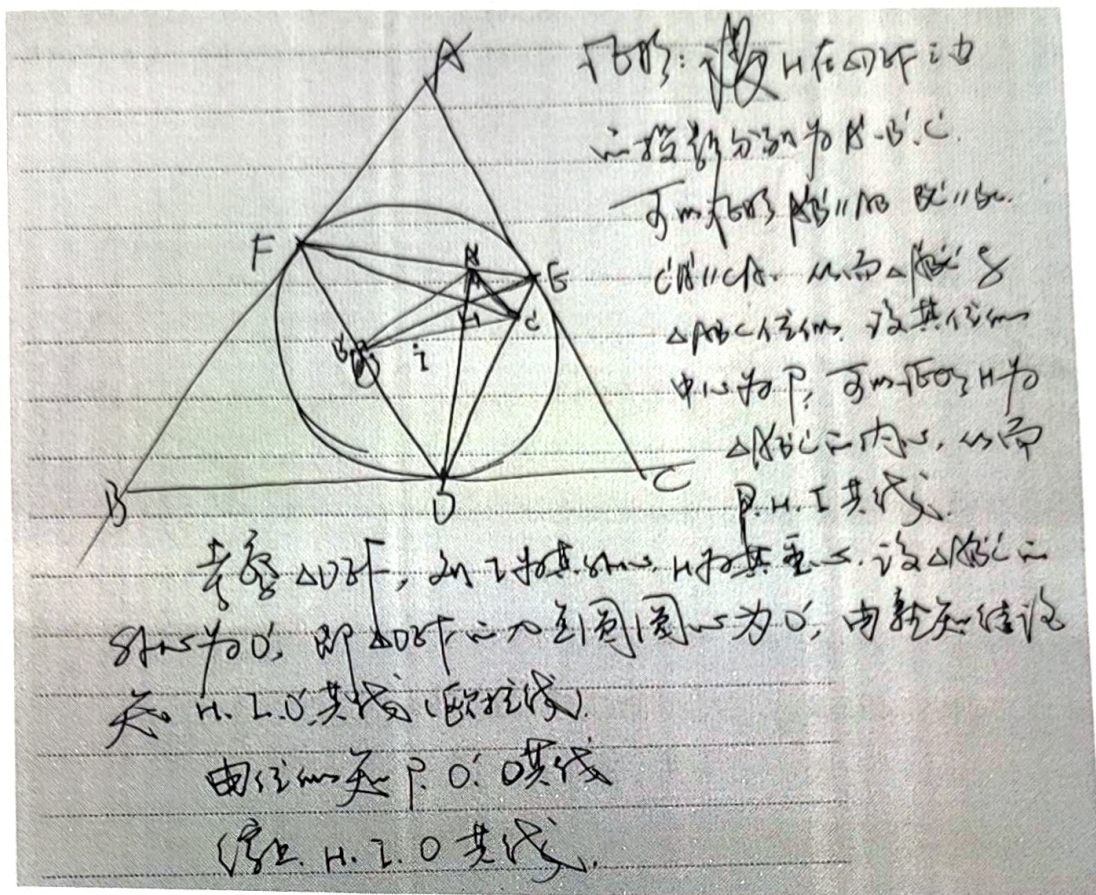
$$\therefore \frac{AN}{AJ_1} = \frac{AJ_2}{AK} = \frac{a_1}{p}$$

$$\therefore \frac{AN}{AJ_1} = \frac{AJ_2}{AK} = \frac{AN}{AJ_1} \therefore N, J_1, J_2, K$$

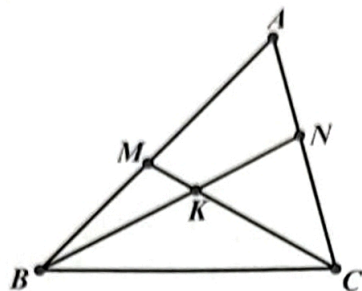
所以 N, J_1, J_2, K 四点共线

2、如图， O 、 I 为 $\triangle ABC$ 的外心、内心，圆 I 切 BC 、 AC 、 AB 于 D 、 E 、 F ， H 为 $\triangle DEF$ 的垂心，求证： O 、 I 、 H 三点共线。





3、如图，锐角 $\triangle ABC$ 的内心、外心、垂心分别为 I 、 O 、 H ，点 M 、 N 分别在 AB 、 AC 上，且 $BM=CN$ ， $AM+AN=BC$ ， BN 交 CM 于 K ，求证： $KH \parallel IO$ ，且 $KH=2IO$ 。



例 11、（托勒密定理逆、三弦定理证明四点共圆）

已知： O 是 $\triangle ABC$ 的外心， D 、 E 分别是边 AC 、 AB 上的点。线段 DE 、 BD 、 CE 的中点分别为 P 、 Q 、 R ， $OH \perp DE$ 垂足为 H 。
求证： P 、 Q 、 R 、 H 四点共圆。

设 $\triangle ADE$ 的三个内角分别为 A 、 D 、 E ， $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R 。
由 $QP \parallel AB$ ， $RP \parallel AC$ 知

$$\sin \angle QPH = \sin E, \sin \angle QPR = \sin A, \sin \angle HPR = \sin D,$$

$$\text{又 } PQ = \frac{BE}{2}, PR = \frac{CD}{2},$$

由 P 、 Q 、 R 、 H 四点共圆，进而 $PQ \sin \angle RPH - PR \sin \angle QPH = PH \sin \angle QPR$

$$\text{所以 } \frac{BE}{2} \sin D - \frac{CD}{2} \sin E = PH \sin A,$$

$$\text{故 } BE \cdot AE - CD \cdot AD = 2PH \cdot DE$$

$$\text{可得 } (R^2 - OE^2) - (R^2 - OD^2) = (DH - EH) \cdot (DH + EH)$$

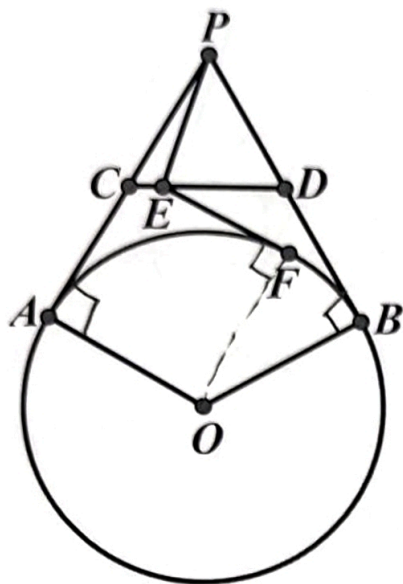
$$\text{即 } OD^2 - OE^2 = DH^2 - EH^2,$$

所以 $OH \perp DE$ ，得证。

例 12、（点圆）

如图，过圆 O 外一点 P 作圆 O 的两条切线 PA 、 PB ，切点分别为 A 、 B ， C 、 D 分别为 PA 、 PB 的中点， E 为 CD 上任意一点，过 E 作圆 O 的切线 EF ，切点为 F ，

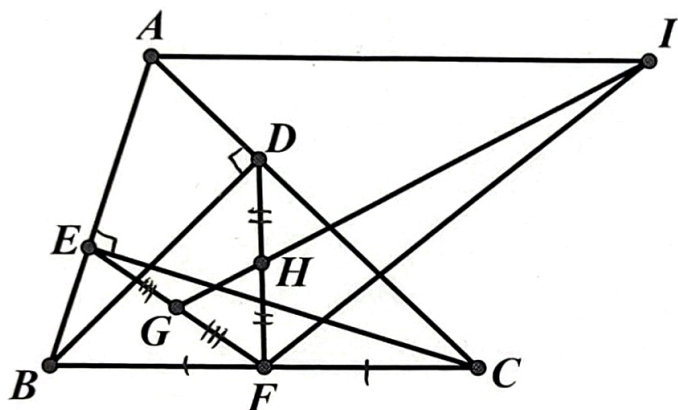
求证: $EP=EF$ 。



根轴

类题:

如图, BD 、 CE 为 $\triangle ABC$ 的高, F 为 BC 中点, G 、 H 分别为 EF 、 DF 的中点, 过 A 作 BC 的平行线交直线 GH 于 I , 连接 IF , 求证: $AI=FI$ 。

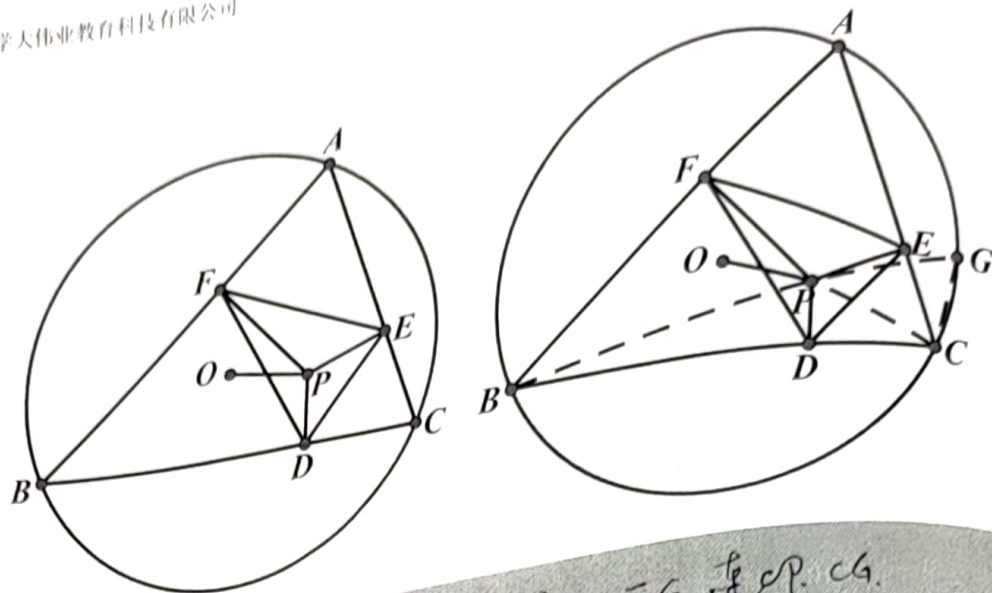


例 13、(根轴解题)

例 14、(一个面积关系式的运用)

1、如图, 设 P 点关于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形为 $\triangle DEF$, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, R 是

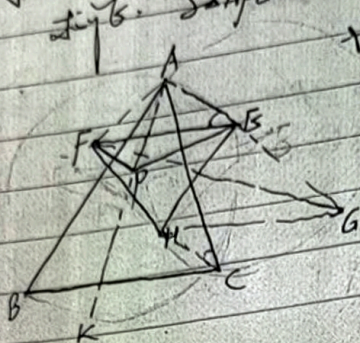
外接圆半径, 求证: $S_{\triangle DEF} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{\triangle ABC}$ 。(欧拉公式)



分析：证明：连接BP，并延长交圆于G，连接CP，CG。
 $R^2 - OP^2$ 为P关于圆O的幂，且有 $R^2 - OP^2 = BP \cdot PG$
 $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} DE \cdot DF \sin \angle FDE = \frac{1}{2} BP \cdot CP \sin \angle FDE$
 $\angle FDE = \angle FDP + \angle CDP = \angle FBP + \angle BCP = \angle ACG + \angle BCP = \angle PCG$
 $\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} BP \cdot CP \sin \angle PCG$
 $\triangle PCG$ 中 $\frac{PG}{\sin \angle PCG} = \frac{PC}{\sin \angle G} = \frac{PC}{\sin A} \Rightarrow \sin \angle PCG = \frac{PG \cdot \sin A}{PC}$
 $\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} BP \cdot CP \sin \angle PCG = \frac{1}{2} BP \cdot PG \sin A \sin B \sin C$
 $\triangle ABC$ 中 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, $BP \cdot PG = R^2 - OP^2$
 $\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{4} (R^2 - OP^2) \sin 2A$

2、如图，已知O、H分别是 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，P点关于AC、AB的对称点为E、F，求证： $S_{\triangle HEF} = \frac{R^2 - OP^2}{2} \sin 2A$ ，其中R是 $\triangle ABC$ 外接圆半径。

例 34. P 关于 $ABAC$ 的对称点 F, E , H 为 $\triangle ABC$ 重心, O 为 $\triangle ABC$ 外心.
 求证: $S_{AHFG} = \frac{R^2 - OP^2}{2} \sin 2A$



作 $FG \perp AC$ 于 G , $HE \perp AB$ 于 E , $HF \perp BC$ 于 F .
 $\angle FBA = 90^\circ - A$
 $\angle HFA = 90^\circ - A$
 $\therefore \angle HFA = \angle FBA$ 四点共圆
 $\therefore \angle FGA = \angle HFA = \angle FBA$
 $\therefore FG \parallel HG$ (同旁内角)
 $\therefore F, G, H, E$ 四点共圆 (共角)

(反思: 本题可以构造一个圆, 使得 F, G, H, E 四点共圆, 且 AB, AC 为圆的切线, 则 $AB \perp AC$ 且 AP 为公共弦)
 $\therefore S_{AHFG} = S_{AGPE} = \frac{1}{2} FG \cdot EG \sin(\angle FGE - \angle ABP)$
 $= \frac{1}{2} FG \cdot EG \sin \angle ABP = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A \cdot \sin \angle ABP$
 $= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 2A$
 $\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle AHC$ 关于 AP 对称, 而 AB, AC 关于 AP 对称
 $\therefore AB \cdot AC = AP \cdot PK = R^2 - OP^2$
 $\therefore S_{AHFG} = \frac{R^2 - OP^2}{2} \sin 2A$

、如图 7-12, 圆内接四边形 $ABCD$, P 是平面内一点, 过 P 作 AB, CD, BC, DA, AC, BD 垂线, 记垂足为 $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$, M_1 为 H_1H_2 中点, M_2 为 H_3H_4 中点, M_3 为 H_5H_6 中点, 求证: M_1, M_2, M_3 三点共线。

$$\Leftrightarrow S_{\triangle M_1 M_2 H_5} = S_{\triangle M_2 M_3 H_6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (S_{\triangle M_1 H_1 H_2} - S_{\triangle M_1 H_3 H_4}) = \frac{1}{2} (S_{\triangle M_2 H_5 H_6} - S_{\triangle M_2 H_7 H_8})$$

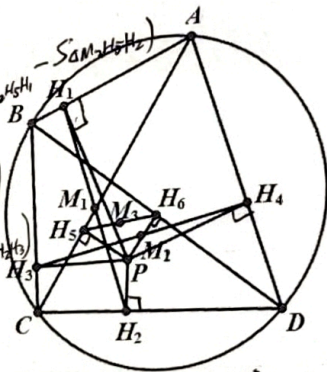
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (S_{\triangle M_1 H_1 H_2} - S_{\triangle M_1 H_3 H_4}) = \frac{1}{2} (S_{\triangle M_2 H_5 H_6} - S_{\triangle M_2 H_7 H_8})$$

$$S_{\triangle M_1 H_1 H_2} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{\triangle BCD}$$

$$S_{\triangle M_1 H_3 H_4} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle M_2 H_5 H_6}$$

$$S_{\triangle M_2 H_7 H_8} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{\triangle ACD}$$



$$S_{\triangle M_2 H_5 H_6} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{\triangle ABD}$$

27

转化法证 $BP^2 \cdot S_{\triangle ACD} + DP^2 \cdot S_{\triangle ABC} = AP^2 \cdot S_{\triangle BCD} + CP^2 \cdot S_{\triangle ACD}$

$$\begin{aligned} S_{\triangle M_1 H_1 H_2} &= \frac{1}{2} H_1 H_2 \cdot H_3 H_4 \sin \angle H_1 H_2 H_3 \\ &= \frac{1}{2} BP^2 \sin \angle ABD \cdot BP \sin \angle CBD \\ &= \frac{1}{2} BP^2 \sin \angle ABD \sin \angle CBD \\ &= \frac{1}{2} BP^2 \cdot \frac{AD}{2R} \cdot \frac{OD}{2R} \cdot \frac{AC}{2R} \\ &= \frac{1}{2} BP^2 \cdot \frac{S_{\triangle ACD}}{2R^2} \end{aligned}$$

$$S_{\triangle M_2 H_5 H_6} = \frac{1}{2} DP^2 \cdot \frac{S_{\triangle ABC}}{2R^2}$$

$$S_{\triangle M_1 H_3 H_4} = \frac{1}{2} AP^2 \cdot \frac{S_{\triangle BCD}}{2R^2}$$

$$S_{\triangle M_2 H_7 H_8} = \frac{1}{2} CP^2 \cdot \frac{S_{\triangle ACD}}{2R^2}$$

客服热线 010-82362802

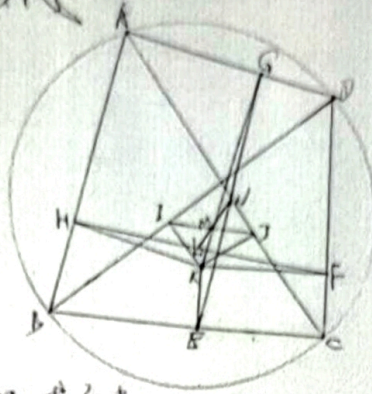
高中升学定制课程领先品牌

32

... (斯特瓦特定理)

PA, PB, PC
 $\Rightarrow S_{\triangle H_1H_2H_3} = S_{\triangle H_1H_2H_3}$
 $S_{\triangle H_1H_2H_3} = \frac{1}{2}(S_{\triangle H_1H_2H_3} - S_{\triangle H_1H_2H_3}) = \frac{1}{2}(S_{\triangle H_1H_2H_3} + S_{\triangle H_1H_2H_3})$
 $= \frac{1}{2}(S_{\triangle H_1H_2H_3} + S_{\triangle H_1H_2H_3}) = \frac{1}{2}(S_{\triangle H_1H_2H_3} + S_{\triangle H_1H_2H_3})$
 $S_{\triangle H_1H_2H_3} = \frac{1}{2}(S_{\triangle H_1H_2H_3} + S_{\triangle H_1H_2H_3})$
 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心
 $S_{\triangle H_1H_2H_3} = S_{\triangle H_1H_2H_3} - S_{\triangle H_1H_2H_3} - S_{\triangle H_1H_2H_3} + S_{\triangle H_1H_2H_3} + S_{\triangle H_1H_2H_3} - S_{\triangle H_1H_2H_3} - S_{\triangle H_1H_2H_3} + S_{\triangle H_1H_2H_3}$
 $S_{\triangle H_1H_2H_3} = \frac{1}{2}(AP \cdot \sin \angle BAC) \cdot (AP \cdot \sin \angle CAQ) \cdot \sin A$
 $= \frac{1}{2}AP^2 \cdot \frac{BC}{2R} \cdot \frac{CD}{2R} \cdot \sin A = \frac{AP^2}{4R^2} S_{\triangle BCD}$
 $S_{\triangle H_1H_2H_3} = \frac{BP^2}{4R^2} S_{\triangle ACD}$
 $S_{\triangle H_1H_2H_3} = \frac{CP^2}{4R^2} S_{\triangle ABD}$
 $S_{\triangle H_1H_2H_3} = \frac{AP^2 + BP^2 + CP^2}{4R^2} S_{\triangle ABC}$ (垂心三平方公式)
 $\therefore S_{\triangle H_1H_2H_3} - S_{\triangle H_1H_2H_3} = S_{\triangle H_1H_2H_3} - S_{\triangle H_1H_2H_3}$
 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心 $AP^2 \cdot S_{\triangle BCD} + CP^2 \cdot S_{\triangle ABD} = BP^2 \cdot S_{\triangle ACD} + AP^2 \cdot S_{\triangle BCD}$
 设 AC, BD 交于 T
 则 $AP^2 \cdot \frac{CT}{AT} + CP^2 \cdot \frac{AT}{CT} = BP^2 \cdot \frac{DT}{BT} + DP^2 \cdot \frac{BT}{DT}$ (*)
 由 Stewart 定理 $PT^2 = AP^2 \cdot \frac{CT}{AT} + CP^2 \cdot \frac{AT}{CT} - AT \cdot CT$
 因此 (*) 左 = $PT^2 + AT \cdot CT$ 同理 (*) 右 = $PT^2 + BT \cdot DT$
 再由相交弦定理 $AT \cdot CT = BT \cdot DT$
 $\therefore (*)$ 左 = $(*)$ 右 得证

△ABC 与 △DEF 同圆且 △ABC 与 △DEF 同圆
二角之和等于二角之和



△ABC 与 △DEF 同圆且 △ABC 与 △DEF 同圆

N, M, L 共线 $\Rightarrow \angle NML = \angle JNL$ (证法 1)

$$\Rightarrow \angle NLG - \angle NLE = \angle JLG - \angle JLE \quad (\text{证法 1})$$

$$\Rightarrow \angle LGF - \angle LGH - (\angle LBF - \angle LBH) = \angle JGH - \angle JGF - (\angle JFH - \angle JFL) \quad (\text{证法 2})$$

$$\Rightarrow \angle LGF + \angle LBH - \angle LGH - \angle LBF = \angle JGH + \angle JFL - \angle JGF - \angle JFH$$

$$\Rightarrow \angle LGF - \angle LGH - \angle LBF - \angle JGH - \angle JFH$$

$$= \angle LGF - \angle JGF - \angle JFH - \angle JGH - \angle LBF$$

$$\Rightarrow \angle LGH + \angle LBF = \angle JGF + \angle JGH$$

$$\text{证法 1} \quad \frac{\angle LGF}{\angle ABC} = \frac{R - OK}{4R} \quad \frac{\angle JFH}{\angle ABC} = \frac{R - OK}{4R}$$

$$\frac{\angle LGH}{\angle ABD} = \frac{R - OK}{4R} \quad \frac{\angle LBF}{\angle ABC} = \frac{R - OK}{4R} \quad \text{证法 2}$$

$$\angle JGF + \angle JFH = \frac{R - OK}{4R} (\angle ABC + \angle ABC) = \frac{R - OK}{4R} \angle ABC$$

$$= \frac{R - OK}{4R} (\angle ABC + \angle ABC) = \angle LGH + \angle LBF \quad (\text{证法 2})$$

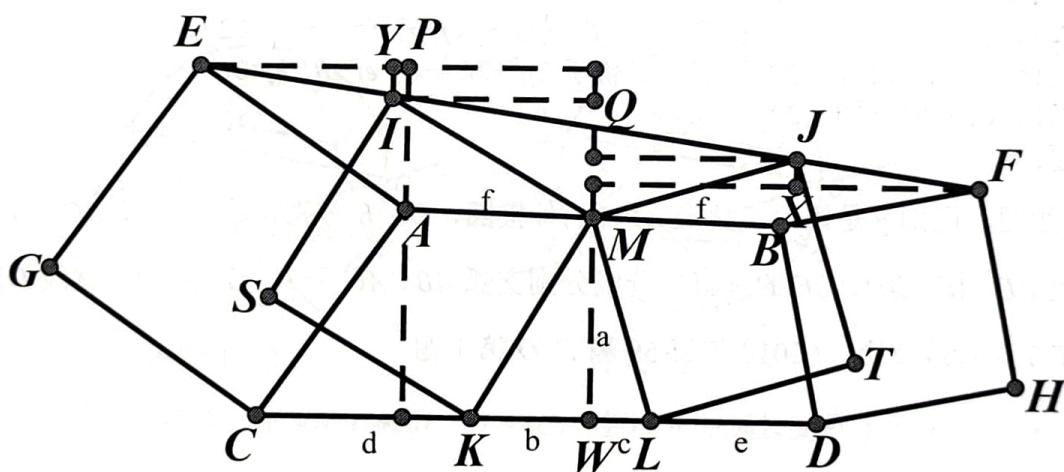
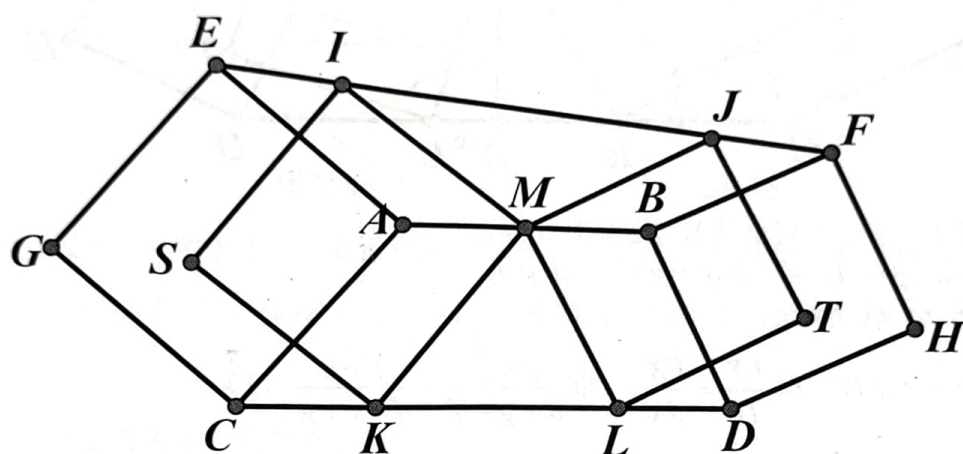
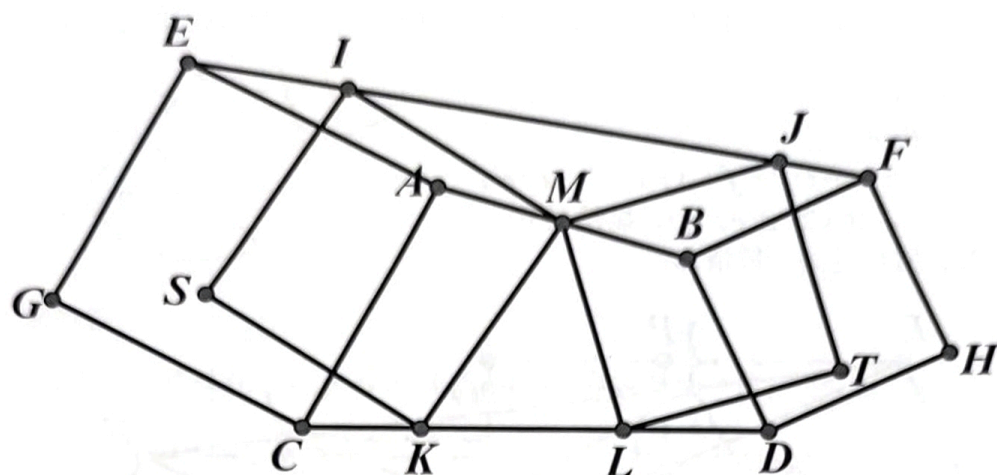
(证法 2 证法 1 证法 2)

例 15、(余师傅几道题)

例 16、(对称分离)

例 17、(特殊化策略)

、如图，已知 $ACGE$ 、 $BDHF$ 、 $MKSI$ 、 $MLTJ$ 都是正方形，并且 M 恰是 AB 中点，点 E 、 I 、 J 、 F 在一直线上，点 C 、 K 、 L 、 D 也在一直线上，求证： $EF^2 + FJ^2 = CK^2 + DL^2$ 。

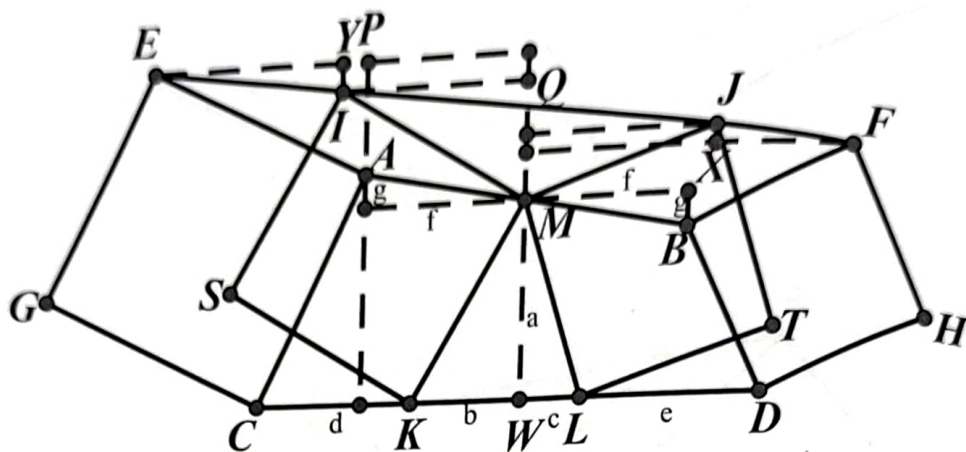


见过类似的图形吗？见过。特殊化， $AB \parallel CD$ ，则有熟悉的影子。

辅助线如图（作一系列垂线），设 $MW=a$ 等。

$EY=f+EP-IQ=f+a-a=f$ ； $IY=AP-MQ=(d+b-f)-b=d-f$ ；

同理 $FX=f$, $JX=f-e$.
 易证 $\triangle E I Y \sim \triangle F I Y$, 而 $EY=FX$, 所以 $\triangle E I Y \cong \triangle F I Y$, 于是 $IY=JX$, 即 $d-f=f-e$,
 $2f=d+e$.
 $EF^2+FJ^2=f^2+(d-f)^2+f^2+(f-e)^2$;
 $CK^2+DL^2=d^2+e^2$;
 所以只需证 $f^2+(d-f)^2+f^2+(f-e)^2=d^2+e^2$;
 $4f^2-2df-2fe=0$, $2f(2f-d-e)=0$. 显然成立.
 下面看看如何推进到一般情形.



辅助线如图 (作一系列垂线), 设 $MW=a$ 等.

$EY=a+g+f-a=g+f$; $IY=(d+b-f+g)-b=d+g-f$;

同理 $FX=f-g$, $JX=f-e+g$.

易证 $\triangle E I Y \sim \triangle F I Y$, 得 $\frac{EY}{IY} = \frac{FX}{JX}$, 即 $\frac{g+f}{d+g-f} = \frac{f-g}{f-e+g}$ (1).

$EF^2+FJ^2=(g+f)^2+(d+g-f)^2+(f-e+g)^2+(f-g)^2$;

$CK^2+DL^2=d^2+e^2$;

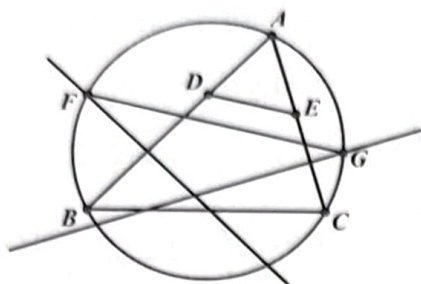
所以只需证 $(g+f)^2+(d+g-f)^2+(f-e+g)^2+(f-g)^2=d^2+e^2$ (2).

通过化简可知 (1)、(2) 两式均等价于 $2g^2+2f^2-eg-ef-df+dg=0$.

所以由 (1) 成立知 (2) 成立.

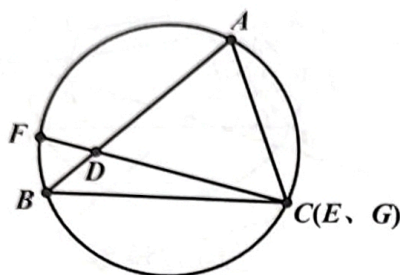
类题:

- 如图, 已知 γ 是锐角三角形 ABC 的外接圆, D 、 E 分别在线段 AB 、 AC 上, 满足 $AD=AE$, BD 、 CE 的垂直平分线分别交弧 AB 、 AC 于 F 、 G . 证明: 直线 DE 和 FG 平行或重合. (2018 年第 59 届 IMO 第 1 题)

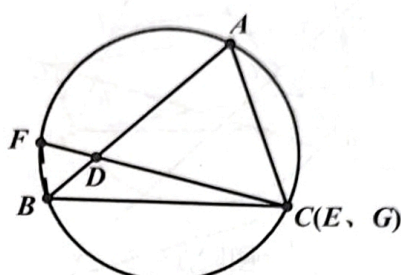


详细解答:

1、首先进行特殊化: 让 E 和 C 重合, 此时原图变成了图附 15-1。



图附 15-1

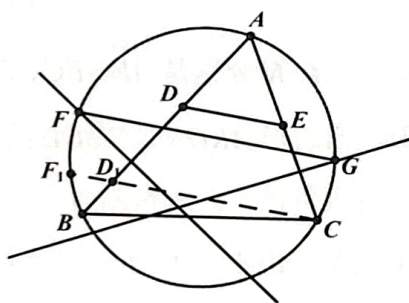


图附 15-2

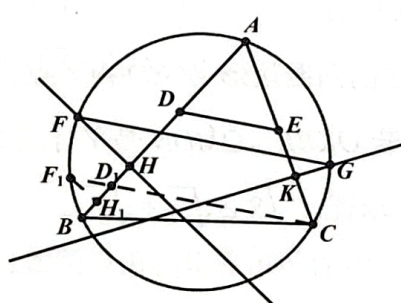
设 ED 交圆 γ 于 F , 要证明结论成立只需证明 F 在 BD 垂直平分线上。如图附 15-2, 连接 BF , 证明 $\angle FBD = \angle FDB$ 即可, 这个不难证明。此时直线 DE 和 FG 重合。

下面进入到一般情况:

我们要设法利用上面已经解答的特殊情况。



图附 15-3

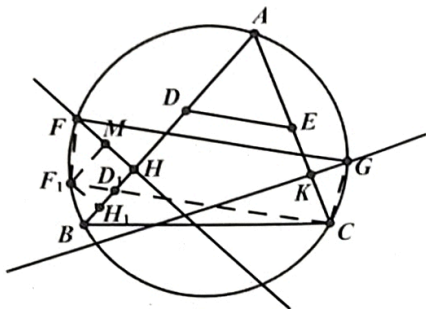


图附 15-4

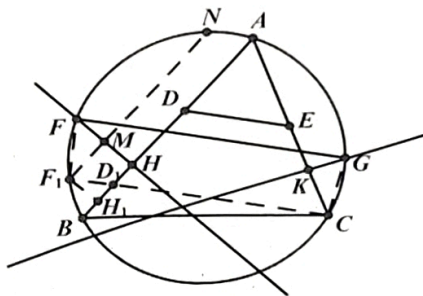
如图附 15-3, 在 AB 上截取 $AD_1 = AC$, 连 CD_1 并延长交圆 γ 于 F_1 , 则 F_1 在 BD_1 的垂直平分线上。易知 $CF_1 \parallel DE$, 接下来我们的目标就变成了证明 $CF_1 \parallel FG$ 。

要证 $CF_1 \parallel FG$, 只需证 FF_1 弧与 CG 弧相等。

下面设法利用 F_1 在 BD_1 的垂直平分线上这个条件, 如图附 15-4, 过 F_1 作 $F_1H_1 \perp AB$ 于 H_1 , 则 H_1 为 BD_1 中点, 又 H 为 BD 中点, 易得 $HH_1 = \frac{1}{2}DD_1$ 。因为 $CK = \frac{1}{2}CE$, $CE = DD_1$, 所以 $HH_1 = CK$ 。接下来自然想到过 F_1 作 FH 的垂线 (如图附 15-5), 设其垂直为 M , 则 $CK = F_1M$ 。再连 FF_1 、 CG , 则如果能够证明 $\triangle F_1FM \cong \triangle CGK$ 就好了。在这里研究者稍微遇到了点困难, 好在马上克服了。



图附 15-5

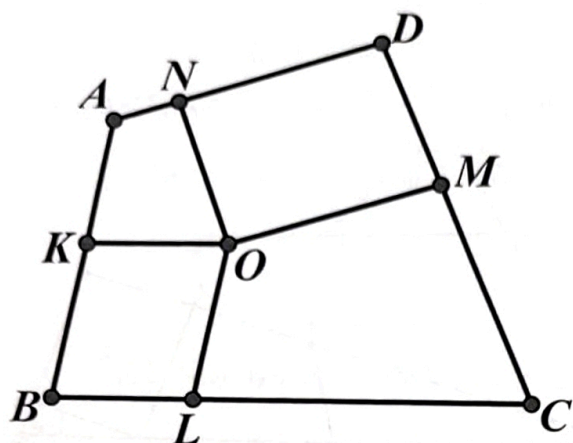


图附 15-6

如图附 15-6, 延长 F_1M 交圆 γ 于 N 。由于 $CK = F_1M$, 若有 $AC = NF_1$ 就好了, 为什么呢? 因为若有 $AC = NF_1$, 则弓形 F_1FN 和弓形 CGA 是完全一样的, 由 $CK = F_1M$, 说明 M 与 K 是对应位置的点, 于是 F 、 G 为对应位置的点, 于是 FF_1 弧与 CG 弧相等, 从而 $CF_1 \parallel FG$ 。因为 $CF_1 \parallel DE$, 所以 $FG \parallel DE$ 。 $AC = NF_1$ 如何证明呢? 由 $\angle NF_1C = \angle AD_1C = \angle ACF_1$ 可以保证 $AC = NF_1$ 。

还有一个奇妙的解法。

2、 O 是面积为 S 的凸四边形 $ABCD$ 内一点, K 、 L 、 M 、 N 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 DA 边上的点, 若 $OKBL$ 、 $OMDN$ 是平行四边形, 四边形 $AKON$ 、 $CMOL$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 。求证: $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$ 。



详细解答:

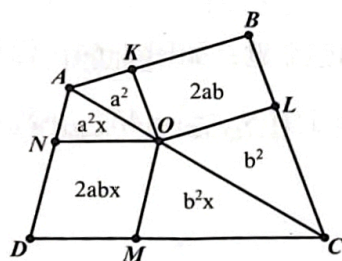


图 5-63

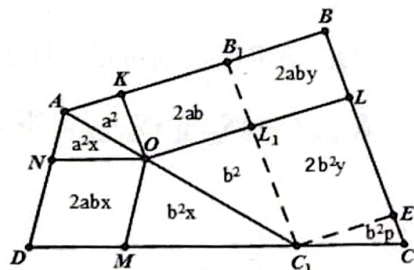


图 5-64

首先解决一种特殊情形:

如图 5-63, O 在 AC 上, 可以如图设出各块图形面积, 易证结论成立。为了下面借鉴到一般情形的方便, 这里还是给出特殊情形的证明过程:

$$\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \Leftrightarrow S - S_1 - S_2 \geq 2\sqrt{S_1 S_2} \Leftrightarrow 2ab(1+x) \geq 2\sqrt{a^2(1+x) \cdot b^2(1+x)}.$$

显然成立。

下面设法进入到一般情形:

如图 5-64, 作一些平行线, 可以如图设出各块图形的面积。

$$\begin{aligned} \sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} &\Leftrightarrow S - S_1 - S_2 \geq 2\sqrt{S_1 S_2} \Leftrightarrow 2ab(1+x+y) \geq 2\sqrt{a^2(1+x) \cdot b^2(1+x+2y+p)} \\ &\Leftrightarrow (1+x+y)^2 \geq (1+x)(1+x+2y+p) \Leftrightarrow y^2 \geq p(1+x). \end{aligned}$$

接下来稍微要动点脑筋, 这位同学很快地就意识到要回到原图形上去, 赋予它实际意义, 这是相当不容易的, 如果说前面的解答用字母来设法表示各块面积有点难度, 但还容易克服, 因为平时同学们这种训练很多, 而从字母回到面积却

不是一般人能够想到的，这就是一种逆向思维，这位同学能够迅速想到要对式子 $y^2 \geq p(1+x)$ 赋予意义，并且能够找到它的图形意义真的不容易，为了与图形面积产生联系，他进行了等价变换，两边同时乘以 b^4 。 $y^2 \geq p(1+x) \Leftrightarrow b^4 y^2 \geq b^2 p \cdot b^2(1+x)$ 。抽出一部分图如下（图 5-65），即只需证 $S_{L_1 C_1 E L}^2 \geq 4S_{\Delta C_1 E C} \cdot S_{L_1 C_1 M O}$ 。

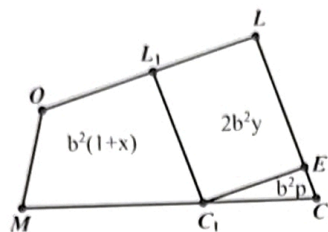


图 5-65

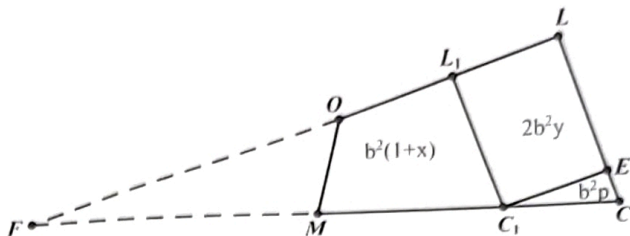


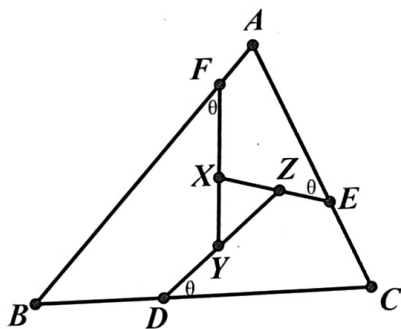
图 5-66

若 $OL \parallel MC$ ，则显然成立，因为 $S_{\Delta C_1 E C} = 0$ 。

若 OL 与 MC 不平行，则可以证明加强命题：如图 5-66，延长 LO 、 CM 相交于 F ，证明 $S_{L_1 C_1 E L}^2 \geq 4S_{\Delta C_1 E C} \cdot S_{\Delta L_1 C_1 F}$ 。事实上 $S_{L_1 C_1 E L}^2 = 4S_{\Delta C_1 E C} \cdot S_{\Delta L_1 C_1 F}$ 成立，于是原题得证。

3、如图，已知 $\angle ZDC = \angle YFB = \angle XEA = \theta$ ， D 、 E 、 F 分别在 BC 、 AC 、 AB 上，求

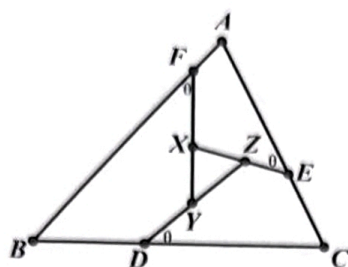
$$\text{证：} \sqrt{S_{\Delta XYZ}} = \sqrt{S_{\Delta ABC}} \cos \theta + \frac{BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \sin \theta。$$



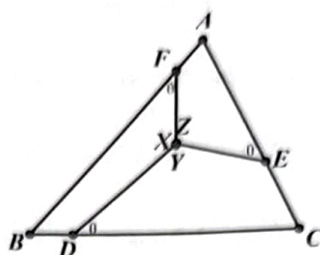
详细解答：

例9、已知如图附 17-52， $\angle ZDC = \angle YFB = \angle XEA = \theta$ ， D 、 E 、 F 分别在 BC 、 AC 、 AB 上，求证：

$$\sqrt{S_{\Delta XYZ}} = \sqrt{S_{\Delta ABC}} \cos \theta + \frac{BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \sin \theta。$$



图附 17-52



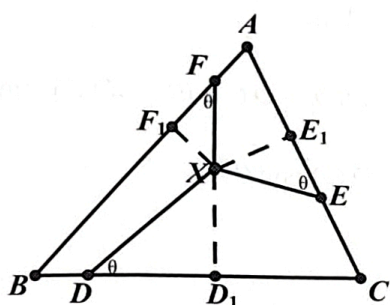
图附 17-53

证法一（特殊化途径一）： $\triangle XYZ$ 缩为一点，原图变为图附 17-53，这时等价于证明：

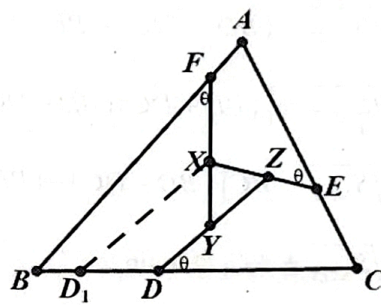
$$0 = \sqrt{S_{\triangle ABC}} \cos \theta + \frac{BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4\sqrt{S_{\triangle ABC}}} \sin \theta$$

（若 $\theta = 90^\circ$ ，则易证。这种情况为我们 θ 为任意角提供了证明的基础，明确地告诉我们该如何添加辅助线。）

$$\Leftrightarrow 4S_{\triangle ABC} = (DC^2 - BD^2 + EA^2 - CE^2 + FB^2 - AF^2) \tan \theta$$



图附 17-54



图附 17-55

详细证明过程如下：

如图图附 17-54，作 $XD_1 \perp BC$ 于 D_1 ， $XE_1 \perp AC$ 于 E_1 ， $XF_1 \perp AB$ 于 F_1 ，易证：

$$D_1C^2 - BD_1^2 + E_1A^2 - CE_1^2 + F_1B^2 - AF_1^2 = 0$$

从而有：

$$(CD - DD_1)^2 - (BD + DD_1)^2 + (EA - EE_1)^2 - (CE + EE_1)^2 + (FB - FF_1)^2 - (AF + FF_1)^2 = 0$$

$$\text{化简得：} DC^2 - BD^2 + EA^2 - CE^2 + FB^2 - AF^2 = 2(BC \cdot DD_1 + AC \cdot EE_1 + AB \cdot FF_1)$$

所以只需证: $4S_{\triangle ABC} = 2(BC \cdot DD_1 + AC \cdot EE_1 + AB \cdot FF_1) \tan \theta$ 。

$$\text{即 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(BC \cdot DD_1 \tan \theta + AC \cdot EE_1 \tan \theta + AB \cdot FF_1 \tan \theta)$$

$$\Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(BC \cdot XD_1 + AC \cdot XE_1 + AB \cdot XF_1)$$

$$\Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle XBC} + S_{\triangle XAC} + S_{\triangle XAB} \text{。这显然成立。}$$

下面进入到一般情况的证明:

如图附 17-55, 过 X 作 $XD_1 \parallel AB$ 交 BC 于 D_1 , 则有结论:

$$0 = \sqrt{S_{\triangle ABC}} \cos \theta + \frac{BD_1^2 - D_1C^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4\sqrt{S_{\triangle ABC}}} \sin \theta。$$

对比要证的结论:

$$\sqrt{S_{\triangle XYZ}} = \sqrt{S_{\triangle ABC}} \cos \theta + \frac{BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4\sqrt{S_{\triangle ABC}}} \sin \theta。$$

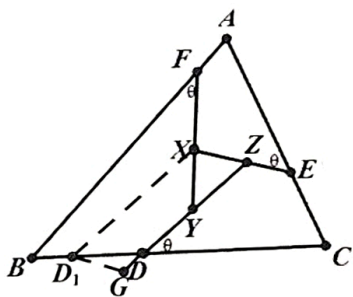
$$\text{只需证明: } \sqrt{S_{\triangle XYZ}} = \frac{BD^2 - DC^2 - BD_1^2 + D_1C^2}{4\sqrt{S_{\triangle ABC}}} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{S_{\triangle ABC}} \sqrt{S_{\triangle XYZ}} = (BD^2 - DC^2 - BD_1^2 + D_1C^2) \sin \theta$$

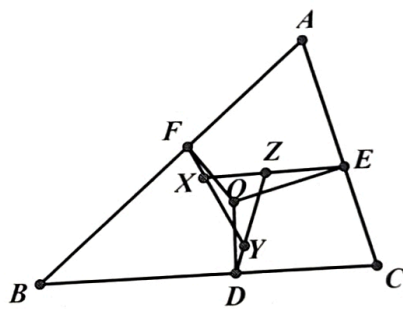
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{S_{\triangle ABC}} \sqrt{S_{\triangle XYZ}} = [(BD + DC)(BD - DC) - (BD_1 + D_1C)(BD_1 - D_1C)] \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{S_{\triangle ABC}} \sqrt{S_{\triangle XYZ}} = BC[(BD - DC) - (BD_1 - D_1C)] \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{S_{\triangle ABC}} \sqrt{S_{\triangle XYZ}} = BC \cdot DD_1 \sin \theta$$



图附 17-56



图附 17-57

如图附 17-56, 再过 D_1 作 $D_1G \parallel XZ$ 交 ZD 于 G , 则

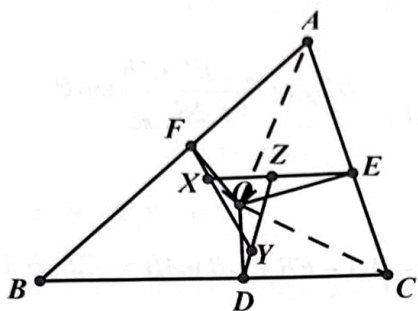
$$\frac{DD_1}{\sin \angle D_1GD} = \frac{GD_1}{\sin \angle D_1DG} \Leftrightarrow \frac{DD_1}{\sin \angle XZY} = \frac{XZ}{\sin \theta} \Leftrightarrow \frac{DD_1}{\sin C} = \frac{XZ}{\sin \theta} \Leftrightarrow DD_1 = \frac{XZ \sin C}{\sin \theta}。$$

易知 $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$, 所以 $2\sqrt{S_{\triangle ABC}}\sqrt{S_{\triangle XYZ}} = BC \cdot DD_1 \sin \theta$

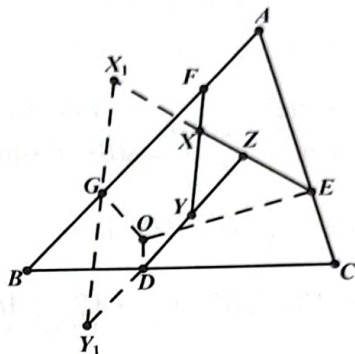
$$\Leftrightarrow 2S_{\triangle ABC} \frac{XZ}{AC} = BC \cdot DD_1 \sin \theta \Leftrightarrow 2S_{\triangle ABC} \frac{XZ}{AC} = BC \cdot \frac{XZ \sin C}{\sin \theta} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow 2S_{\triangle ABC} = BC \cdot AC \sin C. \text{ 这显然成立。}$$

证法二(特殊化途径二): 考虑 $DC^2 - BD^2 + EA^2 - CE^2 + FB^2 - AF^2 = 0$ 的情形, 此时, 过 D 、 E 、 F 分别作三边的垂线必相交于一点, 设为 O , 如图附 17-57。



图附 17-58



图附 17-59

易知 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 为顺相似。下面证明 O 为它们的顺相似中心, 如图附 17-58, 连接 OA 、 OC 、 OX 、 OZ 。易知 A 、 F 、 X 、 O 、 E 五点共圆, 所以 $\angle OXZ = \angle OAC$ 。易知 O 、 Z 、 E 、 C 、 D 五点共圆, 所以 $\angle OZX = \angle OCA$ 。从而 O 是 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 的顺相似中心。

故 $\frac{\sqrt{S_{\triangle XYZ}}}{\sqrt{S_{\triangle ABC}}} = \frac{OX}{OZ} = \sin \angle XAO = \sin \angle XFO = \cos \theta$, 从而命题成立。

下面证明一般情况:

如图附 17-59, 过 D 、 E 分别作 BC 、 AC 的垂线交于 O , 设 O 在 AB 边上的射影为 G 。过 G 作 FY 的平行线交 EX 、 ZD 与 X_1 、 Y_1 。由前面知 $\triangle X_1Y_1Z$ 和 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\cos \theta$ 。

$$\sqrt{S_{\triangle XYZ}} = \sqrt{S_{\triangle ABC}} \cos \theta + \frac{BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4\sqrt{S_{\triangle ABC}}} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_{\triangle XYZ}}}{\sqrt{S_{\triangle ABC}}} = \cos \theta + \frac{BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4S_{\triangle ABC}} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_{\Delta XYZ}}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} = \cos \theta + \frac{AF^2 - FB^2 - (AG^2 - GB^2)}{4S_{\Delta ABC}} \sin \theta$$

$$\text{因为 } XX_1 = \frac{FG}{\sin A} \cdot \sin \theta,$$

$$\text{所以 } \frac{XX_1}{X_1Z} = \frac{\frac{FG}{\sin A} \cdot \sin \theta}{AC \cdot \cos \theta} = \frac{FG \cdot \tan \theta}{AC \cdot \sin A},$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{S_{\Delta XYZ}}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} &= \frac{\sqrt{S_{\Delta XY_1Z}}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \cdot \frac{\sqrt{S_{\Delta XYZ}}}{\sqrt{S_{\Delta XY_1Z}}} = \frac{\sqrt{S_{\Delta XY_1Z}}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \cdot \frac{XZ}{X_1Z} = \cos \theta \left(1 - \frac{XX_1}{X_1Z} \right) \\ &= \cos \theta - \frac{FG \cdot \sin \theta}{AC \cdot \sin A} = \cos \theta - \frac{FG \cdot AB}{AB \cdot AC \cdot \sin A} \sin \theta = \cos \theta - \frac{FG \cdot AB}{2S_{\Delta ABC}} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\text{因为 } AF^2 - FB^2 - (AG^2 - GB^2)$$

$$= (AF - FB) \cdot AB - (AG - GB) \cdot AB = (AF - AG - FB + GB) \cdot AB = -2FG \cdot AB.$$

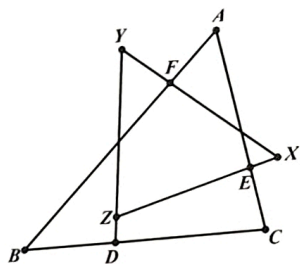
$$\text{所以 } \frac{\sqrt{S_{\Delta XYZ}}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} = \cos \theta - \frac{2FG \cdot AB}{4S_{\Delta ABC}} \sin \theta = \cos \theta + \frac{AF^2 - FB^2 - (AG^2 - GB^2)}{4S_{\Delta ABC}} \sin \theta.$$

从而命题成立。

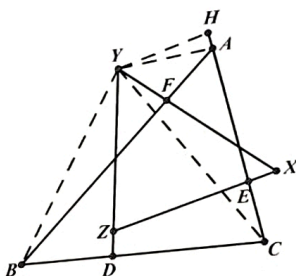
证法三（特殊化途径三）：考虑 $\theta = 90^\circ$ 的情形。

引理：已知：如图附 17-60，D、E、F 为 $\triangle ABC$ 三边上的点，过它们作其在边的垂线，相交于 X、Y、Z。求证：

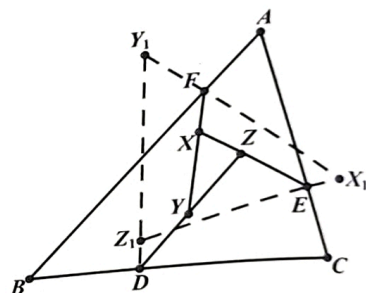
$$4\sqrt{S_{\Delta ABC}} \cdot \sqrt{S_{\Delta XYZ}} = -(BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2).$$



图附 17-60



图附 17-61



图附 17-62

如图附 17-61，过 Y 作 $YH \perp AC$ 于 H，易证 $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ ，则

$$2AC \cdot d_{Y-XZ} = 2AC \cdot d_{B-AC} \cdot \frac{\sqrt{S_{\Delta XYZ}}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} = 4S_{\Delta ABC} \cdot \frac{\sqrt{S_{\Delta XYZ}}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} = 4\sqrt{S_{\Delta ABC}} \cdot \sqrt{S_{\Delta XYZ}}. \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2\right) = -\left(BY^2 - CY^2 + CE^2 - EA^2 + AY^2 - BY^2\right) \\
 & = -\left(AY^2 - CY^2 + CE^2 - EA^2\right) = -\left(AH^2 - CH^2 + CE^2 - EA^2\right) = AC \cdot (CH + AH) + AC \cdot (AE - CE) \\
 & = AC \cdot (CH + AH + AE - CE) = 2AC \cdot EH = 2AC \cdot d_{Y-XZ} = 4\sqrt{S_{\triangle ABC}} \cdot \sqrt{S_{\triangle XYZ}}.
 \end{aligned}$$

一般情况的证明：如图附 17-62，过 D 、 E 、 F 分别作三边的垂线，相交于 X_1 、 Y_1 、 Z_1 ，由引理知

$$4\sqrt{S_{\triangle ABC}} \cdot \sqrt{S_{\triangle XYZ}} = -\left(BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2\right).$$

从而只需证

$$\sqrt{S_{\triangle XYZ}} = \sqrt{S_{\triangle ABC}} \cos \theta - \frac{4\sqrt{S_{\triangle ABC}} \cdot \sqrt{S_{\triangle XYZ}}}{4\sqrt{S_{\triangle ABC}}} \sin \theta = \sqrt{S_{\triangle ABC}} \cos \theta - \sqrt{S_{\triangle XYZ}} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow XY = AB \cos \theta - X_1 Y_1 \sin \theta$$

因为 Y_1 、 F 、 D 、 B 四点共圆， F 、 Y 、 D 、 B 四点共圆。所以 Y_1 、 F 、 Y 、 B 共圆，从而 $\angle BY_1 Y = \theta$ 。

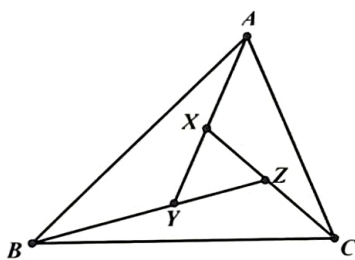
由托勒密定理得： $FB \cos \theta = FY + Y_1 F \sin \theta$ 。

同理 $FX_1 \sin \theta = FX + F A \cos \theta$ 。

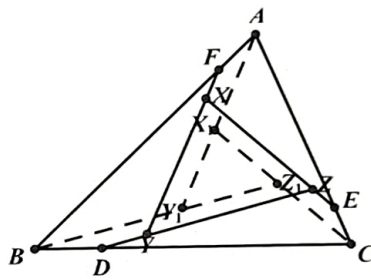
所以 $AB \cos \theta + FX = FY + X_1 Y_1 \sin \theta$ 。

即 $XY = AB \cos \theta - X_1 Y_1 \sin \theta$ 。

证法四（特殊化途径四）： D 、 E 、 F 分别与 B 、 C 、 A 重合，如图附 17-63。



图附 17-63



图附 17-64

$$\text{此时只需证明: } \sqrt{S_{\triangle XYZ}} = \sqrt{S_{\triangle ABC}} \cos \theta - \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4\sqrt{S_{\triangle ABC}}} \sin \theta.$$

下面我们借助三角计算来证明它。

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_{\Delta XYZ}}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} = \cos \theta - \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4S_{\Delta ABC}} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{YZ}{BC} = \cos \theta - \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4S_{\Delta ABC}} \sin \theta$$

$\triangle BCZ$ 中, 运用正弦定理得: $\frac{BZ}{\sin(C-\theta)} = \frac{BC}{\sin C}$, 从而 $BZ = \frac{BC}{\sin C} \sin(C-\theta)$.

$\triangle ABY$ 中, 运用正弦定理得: $\frac{BY}{\sin \theta} = \frac{AB}{\sin B}$, 从而 $BY = \frac{AB}{\sin B} \sin \theta$.

$$\text{所以 } YZ = BZ - BY = \frac{BC}{\sin C} \sin(C-\theta) - \frac{AB}{\sin B} \sin \theta = \frac{a}{\sin C} (\sin C \cos \theta - \cos C \sin \theta) - \frac{c}{\sin B} \sin \theta$$

$$\text{只需证 } \frac{1}{\sin C} (\sin C \cos \theta - \cos C \sin \theta) - \frac{c}{a \sin B} \sin \theta = \cos \theta - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab \sin C} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\cos C}{\sin C} \sin \theta - \frac{c}{a \sin B} \sin \theta = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab \sin C} \sin \theta \Leftrightarrow \frac{\cos C}{\sin C} + \frac{c}{a \sin B} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{c}{ab} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

显然成立。

下面证明一般情况: 如图附 17-64, 过 A, B, C 分别作 FY, DZ, EX 的平行线, 两两相交于 X_1, Y_1, Z_1 。则 $\sqrt{S_{\Delta X_1 Y_1 Z_1}} = \sqrt{S_{\Delta ABC}} \cos \theta - \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \sin \theta$ 。

于是需证的结论等价于

$$\sqrt{S_{\Delta XYZ}} = \sqrt{S_{\Delta ABC}} \cos \theta + \frac{BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \sin \theta$$

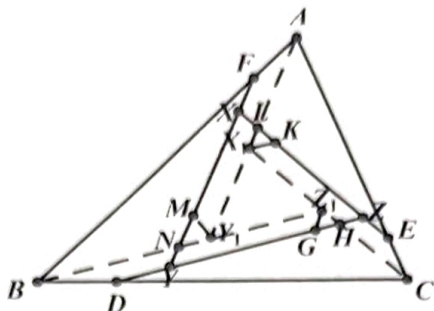
$$\Leftrightarrow \sqrt{S_{\Delta XYZ}} = \sqrt{S_{\Delta ABC}} \cos \theta + \frac{BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \sin \theta$$

$$+ \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \sin \theta - \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{S_{\Delta XYZ}} = \sqrt{S_{\Delta X_1 Y_1 Z_1}} + \frac{BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \sin \theta + \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{4\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{S_{\Delta XYZ}} = \sqrt{S_{\Delta X_1 Y_1 Z_1}} + \frac{2BD \cdot BC + 2CE \cdot CA + 2AF \cdot AB}{4\sqrt{S_{\Delta ABC}}} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{S_{\Delta XYZ}} \sqrt{S_{\Delta ABC}} = \sqrt{S_{\Delta XY_1Z_1}} \sqrt{S_{\Delta ABC}} + \frac{1}{2} (BD \cdot BC + CE \cdot CA + AF \cdot AB) \sin \theta。$$



图附 17-65

如图附 17-65, 过 Y_1 作 XZ 的平行线交 XY 于 M , 过 Z_1 作 XY 的平行线交 YZ 于 G , 过 X_1 作 YZ 的平行线交 XZ 于 K , 运用相似三角形的面积比等于相似比的平方, 容易证明

$$\sqrt{S_{\Delta XYZ}} = \sqrt{S_{\Delta XY_1Z_1}} + \sqrt{S_{\Delta MNY_1}} + \sqrt{S_{\Delta GHZ_1}} + \sqrt{S_{\Delta LKX_1}}。 \text{ 所以只需证明}$$

$$\left(\sqrt{S_{\Delta MNY_1}} + \sqrt{S_{\Delta GHZ_1}} + \sqrt{S_{\Delta LKX_1}} \right) \sqrt{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} (BD \cdot BC + CE \cdot CA + AF \cdot AB) \sin \theta$$

因为

$$\sqrt{S_{\Delta MNY_1}} \cdot \sqrt{S_{\Delta ABC}} = \frac{\sqrt{S_{\Delta MNY_1}}}{\sqrt{S_{\Delta ABC}}} S_{\Delta ABC} = \frac{d_{Y_1-MN}}{d_{C-AB}} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} d_{Y_1-MN} \cdot AB = \frac{1}{2} AF \sin \theta \cdot AB = \frac{1}{2} AF \cdot AB \sin \theta$$

$$\text{同理 } \sqrt{S_{\Delta GHZ_1}} \cdot \sqrt{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} BD \cdot BC \sin \theta, \quad \sqrt{S_{\Delta LKX_1}} \cdot \sqrt{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} CE \cdot CA \sin \theta。$$

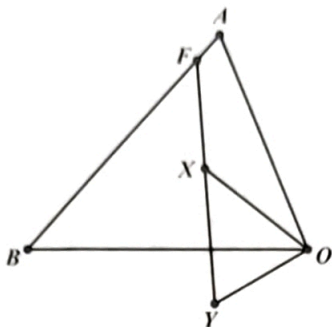
$$\text{所以 } \left(\sqrt{S_{\Delta MNY_1}} + \sqrt{S_{\Delta GHZ_1}} + \sqrt{S_{\Delta LKX_1}} \right) \sqrt{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} (BD \cdot BC + CE \cdot CA + AF \cdot AB) \sin \theta。$$

证法五 (特殊化途径五): 先解决 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 共一个顶点的情况。以此为引理, 找到两个相似三角形的顺相似中心, 分成三组共顶点的相似三角形, 然后分别运用引理得到三个式子, 再对三个式子运用等比定理得到结论。这个解答来自刘培杰 (2015, pp. 104-106), 为了完整性, 研究者进行了编辑, 整个解答过程如下。

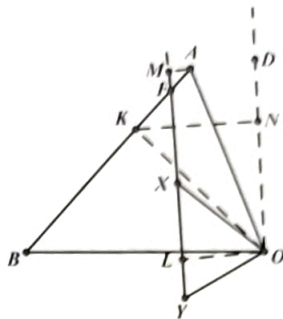
考虑 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 共一个顶点的情况。

引理: 如图附 17-66, 已知 $\triangle OXY$ 与 $\triangle OAB$, YX 交 AB 于 F , $\angle XO A = \angle YOB =$

$$\angle XFB = \theta, \text{ 求证: } \sqrt{S_{\triangle OXY}} = \sqrt{S_{\triangle OAB}} \cos \theta + \frac{OB^2 - OA^2 + AF^2 - BF^2}{4\sqrt{S_{\triangle OAB}}} \sin \theta.$$



图附 17-66



图附 17-67

如图附 17-67, 作 $AM \perp YF$ 于 M , 作 $OD \parallel XY$, $OK \perp AB$ 于 K , $KN \perp OD$ 于 N 。易证 $\triangle OXY \sim \triangle OAB$ 。

$$\begin{aligned} \sqrt{S_{\triangle OXY}} &= \sqrt{S_{\triangle OAB}} \cos \theta + \frac{OB^2 - OA^2 + AF^2 - BF^2}{4\sqrt{S_{\triangle OAB}}} \sin \theta \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_{\triangle OXY}}}{\sqrt{S_{\triangle OAB}}} &= \cos \theta + \frac{KB^2 - KA^2 + AF^2 - BF^2}{4S_{\triangle OAB}} \sin \theta \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_{\triangle OXY}}}{\sqrt{S_{\triangle OAB}}} &= \cos \theta + \frac{(KB + KA)(KB - KA) + (AF + BF)(AF - BF)}{4S_{\triangle OAB}} \sin \theta \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_{\triangle OXY}}}{\sqrt{S_{\triangle OAB}}} &= \cos \theta + \frac{AB(KB - KA + AF - BF)}{4S_{\triangle OAB}} \sin \theta \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_{\triangle OXY}}}{\sqrt{S_{\triangle OAB}}} &= \cos \theta + \frac{AB(AB - 2KA + 2AF - AB)}{2AB \cdot OK} \sin \theta \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_{\triangle OXY}}}{\sqrt{S_{\triangle OAB}}} &= \cos \theta + \frac{AF - KA}{OK} \sin \theta \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_{\triangle OXY}}}{\sqrt{S_{\triangle OAB}}} &= \frac{OK \cos \theta - KF \sin \theta}{OK} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_{\triangle OXY}}}{\sqrt{S_{\triangle OAB}}} &= \frac{KN - KH}{OK} = \frac{NH}{OK} = \frac{OL}{OK}. \end{aligned}$$

由 $\triangle OXY \sim \triangle OAB$ 知其成立。

下面证明原问题:

易证 $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$, 取其顺相似中心 O , 连接 OA, OB, OC, OX, OY, OZ , 由引理得:

$$\frac{\sqrt{S_{\triangle XYZ}}}{\sqrt{S_{\triangle ABC}}} = \frac{\sqrt{S_{\triangle OXY}}}{\sqrt{S_{\triangle OAB}}} = \frac{4S_{\triangle OAB} \cdot \cos \theta + (OB^2 - OA^2 + AF^2 - BF^2) \sin \theta}{4S_{\triangle OAB}},$$

$$\frac{\sqrt{S_{\triangle XYZ}}}{\sqrt{S_{\triangle ABC}}} = \frac{\sqrt{S_{\triangle OYZ}}}{\sqrt{S_{\triangle OAC}}} = \frac{4S_{\triangle OAC} \cdot \cos \theta + (OA^2 - OC^2 + CE^2 - AE^2) \sin \theta}{4S_{\triangle OAC}},$$

$$\frac{\sqrt{S_{\triangle XYZ}}}{\sqrt{S_{\triangle ABC}}} = \frac{\sqrt{S_{\triangle OXZ}}}{\sqrt{S_{\triangle OBC}}} = \frac{4S_{\triangle OBC} \cdot \cos \theta + (OC^2 - OB^2 + BD^2 - CD^2) \sin \theta}{4S_{\triangle OBC}}.$$

对上面三个式子运用等比性质得。

$$\frac{\sqrt{S_{\triangle XYZ}}}{\sqrt{S_{\triangle ABC}}} = \frac{4S_{\triangle ABC} \cdot \cos \theta + (BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2) \sin \theta}{4S_{\triangle ABC}}.$$

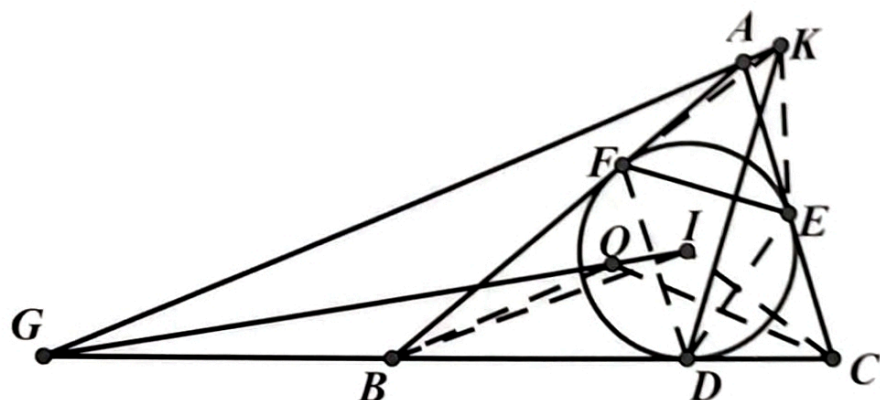
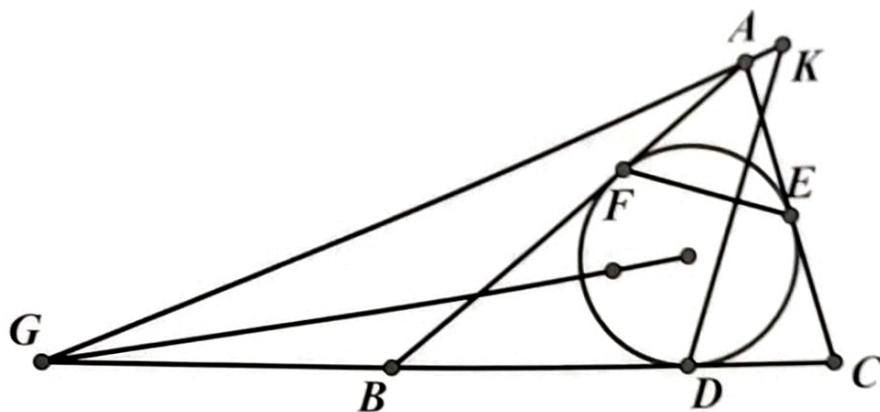
$$\text{故 } \sqrt{S_{\triangle XYZ}} = \sqrt{S_{\triangle ABC}} \cos \theta + \frac{BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2}{4\sqrt{S_{\triangle ABC}}} \sin \theta.$$

4、设凸四边形的面积为 S , 内角分别为 $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$, 边长分别为 l, m, n, k , 又记 $p = \sum \tan \alpha, q = \sum \cot \alpha, t = \frac{l-m+n-k}{2}, T = \frac{l+m+n+k}{2}$. 求证:

$$S = \frac{T^2}{q} - \frac{t^2}{p}.$$

例 18、(变相同一法)

已知圆 I 是 $\triangle ABC$ 内切圆, 切 BC 、 AC 、 AB 于 D 、 E 、 F , O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 直线 OI 、 BC 交于 G , 过 D 作 EF 垂线交 AG 于 K , 求证: EF 是 DK 垂直平分线。



证明: 设 $\triangle ABC$ 的三个角为 A 、 B 、 C 。

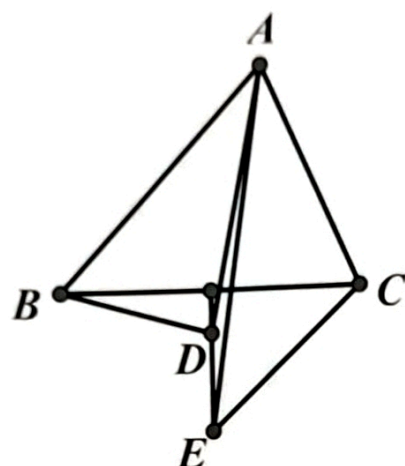
我们换一个说法: 设 EF 是 DK 垂直平分线, 我们只需证 A 、 K 、 G 共线

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{\sin \angle EAK}{\sin \angle FAK} = \frac{\sin \angle CAG}{\sin \angle BAG} \\
 &\frac{\sin \angle EAK}{\sin \angle FAK} = \frac{AK \sin \angle EAK}{AK \sin \angle FAK} = \frac{EK \sin \angle AEK}{FK \sin \angle AFK} = \frac{\sin \angle AEK}{\sin \angle AFK} = \frac{DE \sin \angle AEK}{DF \sin \angle AFK} \\
 &= \frac{DE \sin(\angle FEK - \angle FEA)}{DF \sin(\angle AFE - \angle EFK)} = \frac{DE \sin(\angle FED - \angle FEA)}{DF \sin(\angle AFE - \angle DFE)} = \frac{2r \cos \frac{C}{2} \sin \left(90^\circ - \frac{B}{2} - \frac{180^\circ - A}{2} \right)}{2r \cos \frac{B}{2} \sin \left(\frac{180^\circ - A}{2} - \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) \right)} \\
 &= \frac{\cos \frac{C}{2} \sin \left(90^\circ - \frac{B}{2} - \frac{180^\circ - A}{2} \right)}{\cos \frac{B}{2} \sin \left(\frac{180^\circ - A}{2} - \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) \right)} = \frac{\cos \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{C-A}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{AC \sin \angle CAG}{AB \sin \angle BAG} &= \frac{CG}{BG} \Rightarrow \frac{\sin \angle CAG}{\sin \angle BAG} = \frac{CG \cdot AB}{BG \cdot AC} = \frac{CO \sin \angle COG \sin C}{BO \sin \angle BOG \sin B} = \frac{CO \sin \angle COI \sin C}{BO \sin \angle BOI \sin B} \\
&= \frac{\frac{r}{\sin \frac{C}{2}} \sin \angle CIO \sin C}{\frac{r}{\sin \frac{B}{2}} \sin \angle BIO \sin B} = \frac{\cos \frac{C}{2} \sin \angle CIO}{\cos \frac{B}{2} \sin \angle BIO} = \frac{\cos \frac{C}{2} \cdot OI \sin \angle CIO}{\cos \frac{B}{2} \cdot OI \sin \angle BIO} \\
&= \frac{\cos \frac{C}{2} \cdot OC \sin \angle OCI}{\cos \frac{B}{2} \cdot OB \sin \angle OBI} = \frac{\cos \frac{C}{2} \sin \left(90^\circ - A - \frac{C}{2} \right)}{\cos \frac{B}{2} \sin \left(\frac{B}{2} - (90^\circ - A) \right)} \\
\text{因为 } 90^\circ - A - \frac{C}{2} &= \frac{A+B+C}{2} - A - \frac{C}{2} = \frac{B-A}{2}, \\
\frac{B}{2} - (90^\circ - A) &= \frac{B}{2} - \left(\frac{A+B+C}{2} - A \right) = \frac{A-C}{2}. \\
\text{所以 } \frac{\sin \angle EAK}{\sin \angle FAK} &= \frac{\sin \angle CAG}{\sin \angle BAG}.
\end{aligned}$$

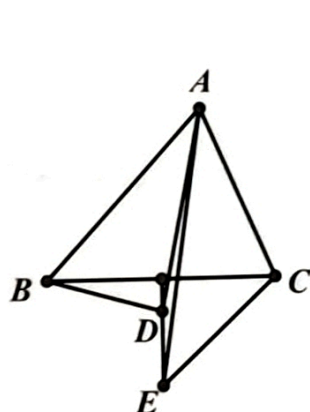
例 19、（杂题：印象深刻的题目）

1、如图，已知 D 、 E 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边垂直平分线上两点，满足 $\angle ABD + \angle ACE = 180^\circ$ ，连接 AD 、 AE 。求证： $\angle BAD = \angle CAE$ 。

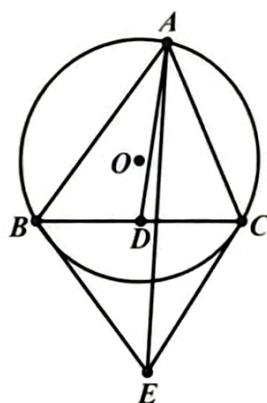


详细解答:

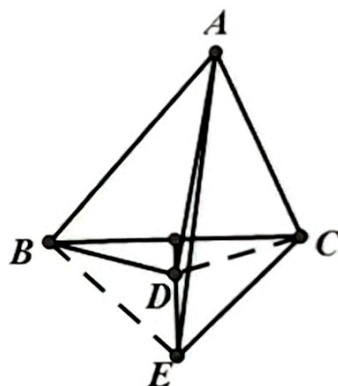
题 1、如图附 18-1，已知 D 、 E 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边垂直平分线上两点，满足 $\angle ABD + \angle ACE = 180^\circ$ ，连接 AD 、 AE 。求证： $\angle BAD = \angle CAE$ 。（这是教材《特殊化策略二》例 3 的配套习题）



图附 18-1



图附 18-2



图附 18-3

这是几何大师叶中豪编的题，他可能是对一个命题做推广而得到的。其特殊形式如下：如图附 18-2， $\triangle ABC$ 为锐角三角形， D 为 BC 中点，过 B 、 C 做 $\triangle ABC$ 外接圆的切线交于点 E 连接 AD 、 AE 。求证： $\angle BAD = \angle CAE$ 。研究者在讲解的时候就是先解决特殊情形，然后借鉴其方法解决原命题的，完全按照研究者课前的准备进行的。讲完了研究者的特殊化策略，研究者再介绍了他的两个证明。很明显研究者是为了特殊化策略而特殊化策略，为什么呢？你看了他的两个解答，特别是后一个解答时就会明白。

研究者在讲解之前给了学生十分钟的思考过程,在其他同学还没有人给出完全的证明的时候,他迅速地给出了两种证明方法。

证法一:如图附 18-3,连接 BE 、 CD 。

对 $\triangle ABC$ 及点 D , 运用赛瓦角元定理得:

$$\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} \cdot \frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle BCD} \cdot \frac{\sin \angle CBD}{\sin \angle ABD} = 1。$$

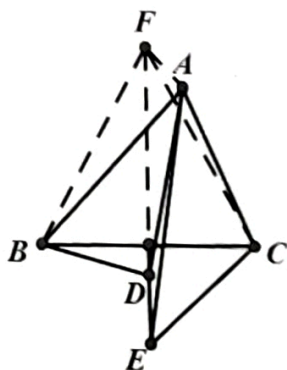
对 $\triangle ABC$ 及点 E , 运用赛瓦角元定理得:

$$\frac{\sin \angle CAE}{\sin \angle BAE} \cdot \frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle CBE} \cdot \frac{\sin \angle BCE}{\sin \angle ACE} = 1。$$

因为 $BD=CD$, $BE=CE$, 所以 $\angle CBD=\angle BCD$, $\angle BCE=\angle CBE$ 。

故 $\angle DBE=\angle DCE$ 。所以 $\angle ABE+\angle ACD=\angle ABD+\angle DBE+\angle ACE-\angle DCE$
 $=\angle ABD+\angle ACE=180^\circ$ 。

于是 $\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} = \frac{\sin \angle CAE}{\sin \angle BAE}$ 。注意到 $\angle BAD+\angle CAD=\angle BAE+\angle CAE$, 容易得到 $\angle BAD=\angle CAE$ 。

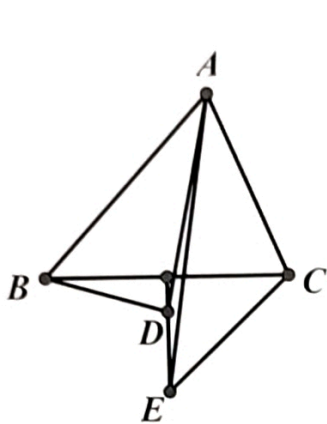


图附 18-4

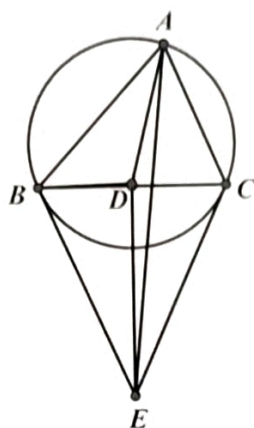
他不满足于上面利用了三角的证法,认为一道几何题最好是用纯几何方法解答,然后不一会给出了第二种解答。

证法二:如图附 18-4,在直线 ED 上取一点 F ,使得 B 、 F 、 A 、 D 共圆,连接 BF 、 AF 、 CF 。 $\angle DFA=\angle ABD=180^\circ-\angle ACE$ 。所以 A 、 F 、 E 、 C 共圆。因为 $FB=FC$, 所以 $\angle BFE=\angle CFE$ 。故 $\angle BAD=\angle BFE=\angle CFE=\angle CAE$ 。

其他解答:如图附 17-68,已知 D 、 E 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边垂直平分线上两点,满足 $\angle ABD+\angle ACE=180^\circ$, 连接 AD 、 AE 。求证: $\angle BAD=\angle CAE$ 。



图附 17-68



图附 17-69

一时无从下手。转而联想有没有见过类似的题目？也许你见过一个结论相同，且有几分相似的题目，具体题目如下：

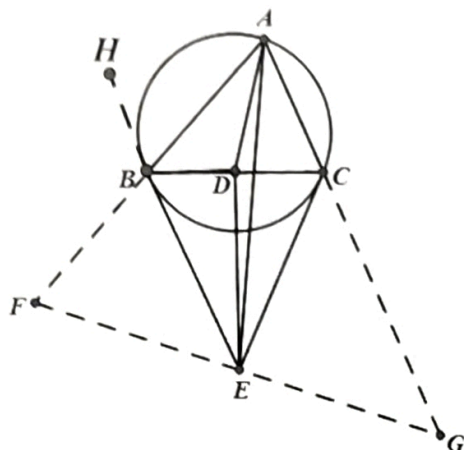
类似题：如图附 17-69，过 B 、 C 分别作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线，两切线相交于点 E ， D 为 BC 中点，连接 AD 、 AE 。求证： $\angle BAD = \angle CAE$ 。

这道题很经典，有很多方法可以证明，研究者曾给出过一种巧妙的原创证法，下面给出详细解答过程：

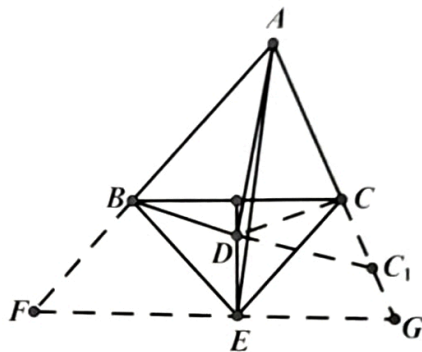
如图附 17-70，过 E 作一直线交 AB 、 AC 延长线于 F 、 G ，使得 $\triangle AFG \sim \triangle ACB$ ，下面证明 E 为 FG 中点即可。

延长 EB 至 H ，则 $\angle FBE = \angle ABH = \angle ACB = \angle F$ ，所以 $EF = EB$ ；同理 $EG = EC$ 。因为 $EB = EC$ ，所以 $EF = EG$ ，即 E 为 FG 中点。又 D 为 BC 中点，且 $\triangle AFG \sim \triangle ACB$ ，所以 $\angle BAD = \angle CAE$ 。

实际上这道类似题是原题的特殊情况，因为类似题中也满足 D 、 E 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边垂直平分线上两点，且 $\angle ABD + \angle ACE = 180^\circ$ 。下面类比类似题的证明方法来解原题，过程如下：



图附 17-70



图附 17-71

如图附 17-71，延长 BD 交 AC 延长线于 C_1 ，过 E 作一直线交 AB 、 AC 延长线于 F 、 G ，使得 $\triangle AFG \sim \triangle AC_1B$ ，下面证明 $\frac{BD}{C_1D} = \frac{EG}{EF}$ 即可。

连接 CD ，因为 $\angle ABD + \angle ACE = 180^\circ$ ， $\angle ECG + \angle ACE = 180^\circ$ ，所以 $\angle ABD = \angle ECG$ 。又 $\angle ABD = \angle AGF$ ，所以 $\angle ECG = \angle AGF$ ，所以 $EG = EC = EB$ 。又 $BD = CD$ ，于是转化为证 $\frac{CD}{C_1D} = \frac{BE}{EF}$ 即可。

因为 $\angle DC_1C = \angle F$ 。所以

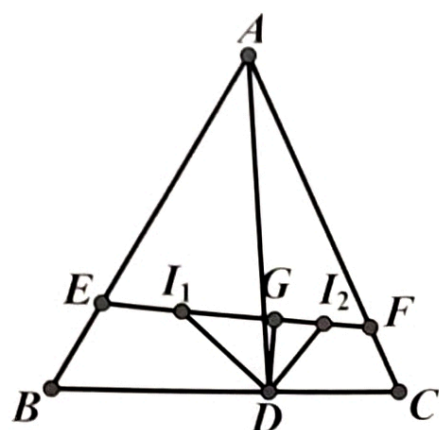
$$\frac{CD}{C_1D} = \frac{BE}{EF} \Leftrightarrow \frac{\sin \angle DC_1C}{\sin \angle DCC_1} = \frac{\sin \angle F}{\sin \angle FBE} \Leftrightarrow \sin \angle DCC_1 = \sin \angle FBE。$$

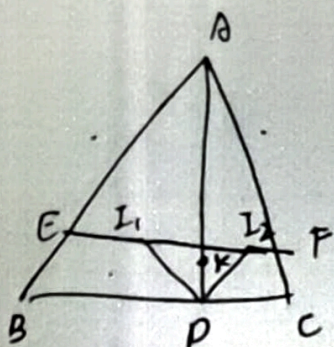
因为 $\angle EBD = \angle ECD$ 。所以 $\angle D C C_1 + \angle FBE = \angle D C C_1 - \angle DCE + \angle FBE + \angle EBD = \angle ECG + \angle FBD = 180^\circ - \angle ACE + 180^\circ - \angle ABD = 360^\circ - (\angle ABD + \angle ACE) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$ 。于是 $\sin \angle D C C_1 = \sin \angle FBE$ 。

注：当然类似题还有很多其他解法，事实上每种解法都可以类比过来解答此题。

2、如图， I_1 、 I_2 分别为 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 的内心，直线 I_1I_2 交 AB 、 AC 于 E 、 F ，

$AE = AF$ ，过 D 作 $DG \perp I_1I_2$ 于 G ，求证： $\frac{I_1G}{I_2G} = \frac{BD}{CD}$ 。





取K, 使 AI, KI 共圓

FLA

$$\angle A I_1 I_2 - \angle I_1 A K = \angle A I_2 I_1 - \angle I_2 A K$$

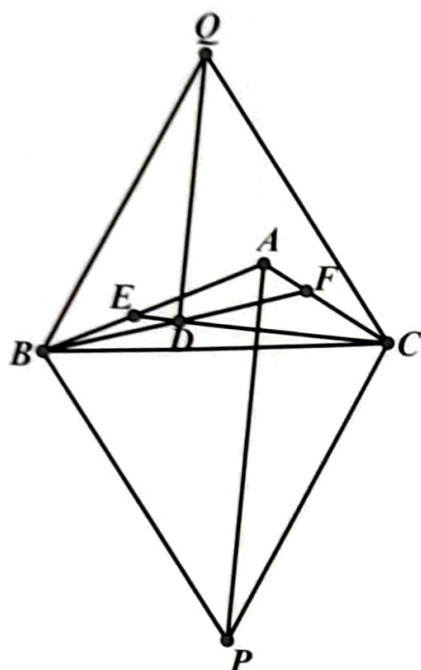
$\therefore \triangle ALI_2$ 外心 $\in AK \perp$

$$\therefore \angle AILK = 90^\circ$$

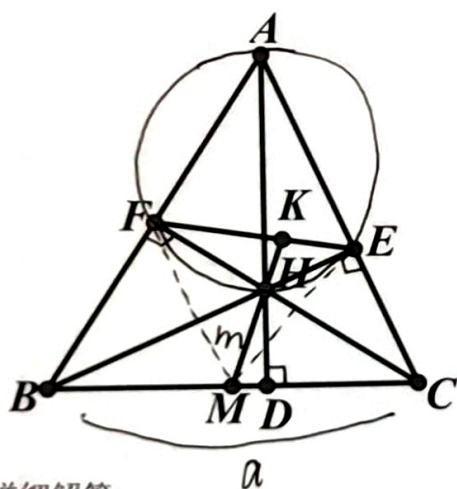
$$\therefore \angle LKD = \angle LBD$$

$$\therefore \frac{I_1 D^2}{BD} = DK = \frac{I_2 D^2}{CD}$$

3、 $\angle A=120^\circ$ ， $BE=CF$ ， $\triangle BCP$ 、 $\triangle BCQ$ 均为等边三角形，求证： $AP \parallel DQ$ 。

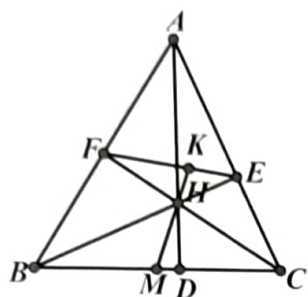


4、如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 、 BE 、 CF 为高， H 为垂心， M 为 BC 中点，直线 MH 交 EF 于 K 。已知 $BC=a$ ， $MH=m$ ，求 MK 。

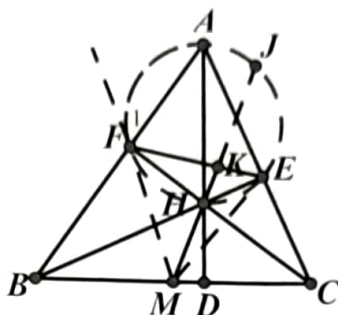


详细解答：

题2、如图附18-5，在 $\triangle ABC$ 中， AD 、 BE 、 CF 为高， H 为垂心， M 为 BC 中点，直线 MH 交 EF 于 K 。已知 $BC=a$ ， $MH=m$ ，求 MK 。（这是教材《定值问题》第25题）



图附 18-5



图附 18-6

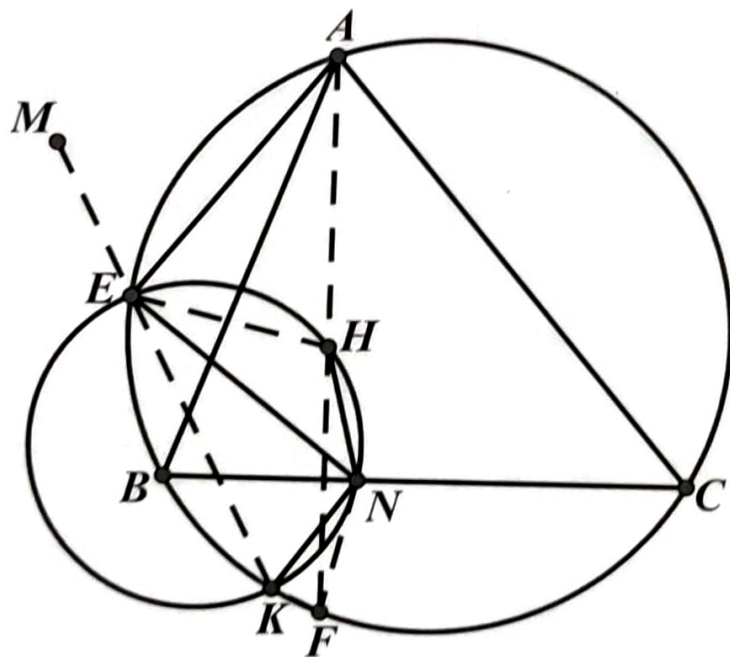
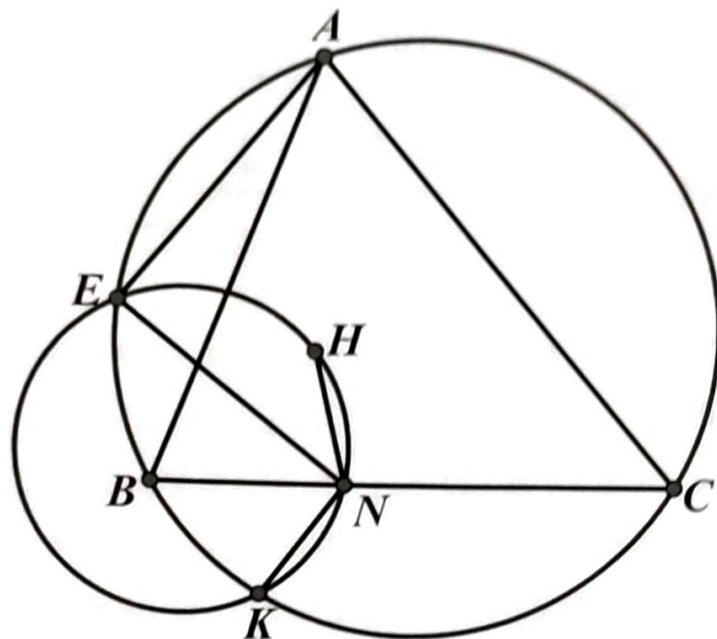
这道题来自《学数学》第2卷（李潜，2015b，p. 3）一道难题中选取其一部分而成。研究者通过特殊化（让 $AB=AC$ ）求得 MK 的长度，这时就有了目标，然后设法在一般情况下证明它，当然这个证明用到了三角，且计算很繁琐，不是很好的解答，事实上原书上的解答也不是很好，也很繁琐。这道题很多同学通过特殊化能找到答案，但却不能在一般情况下证明它。面对这道题，除了特殊化找到答案，然后就无法动手了，过了几分钟在几乎没有人知道如何去证明的情况下，研究者就开始讲了，讲了至少有十分钟，这时其他同学都在认真听讲，而黄同学在继续思索，当研究者还没讲完，他就已经给出了一个完整的答案。过程如下：

易知 A 、 F 、 H 、 E 四点共圆，如图附 18-6 作出这个圆。连接 HM 、 EM ，延长 MK 交圆于 J 。因为 $\angle 1 = \angle BFM = \angle FBM = \angle AEF$ ，所以 FM 为圆的切线，同理，

EM 也为圆的切线。于是 $ME^2 = MH \cdot MJ$ ，故 $MJ = \frac{ME^2}{MH} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{m} = \frac{a^2}{4m}$ 。由一个熟

知的结论： $\frac{2}{MK} = \frac{1}{MH} + \frac{1}{MJ}$ ，得 $\frac{2}{MK} = \frac{1}{m} + \frac{4m}{a^2}$ 。易得 $MK = \frac{2a^2m}{a^2 + 4m^2}$ 。

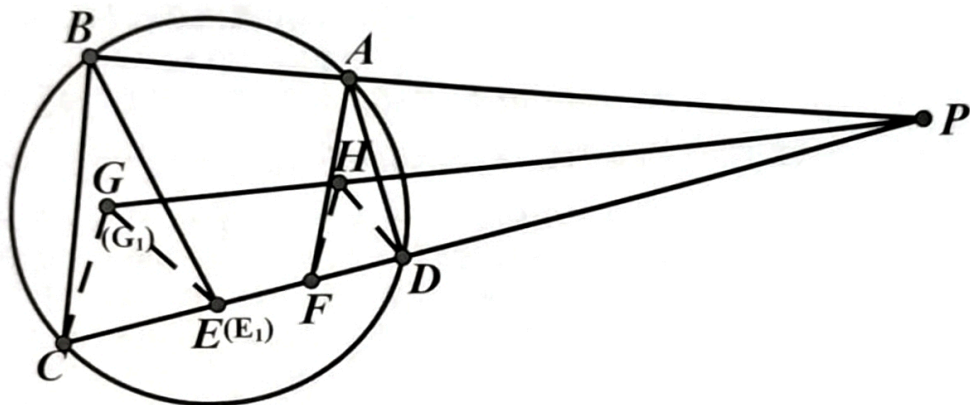
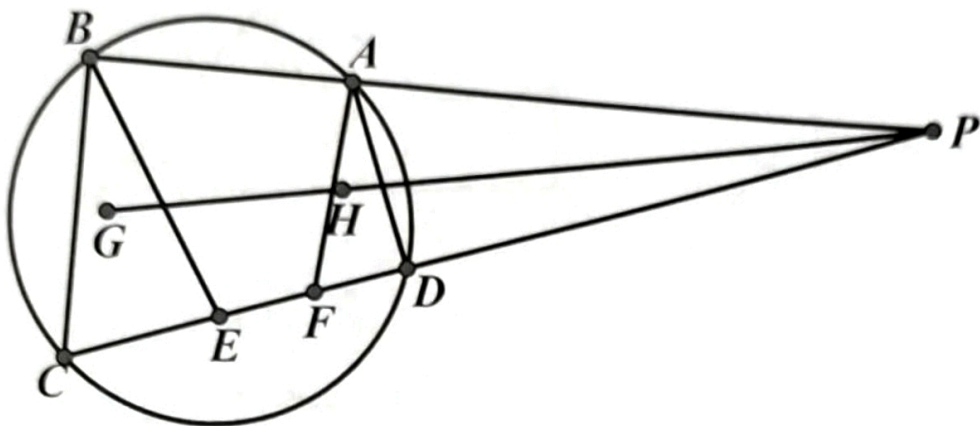
5、如图， H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，过 H 作一圆交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 E, K ，交 BC 于 N ， $NH=NK$ ，求证： $AE \perp EN$ 。



证明：设 AH 交 $\triangle ABC$ 外接圆于 F ，连接 NF, EH, EK, FK ，则 BC 垂直平分 HF ，于是 $NF=NH=NK$ ，所以 N 为 $\triangle HFK$ 的外心，从而 $\angle HNK=2\angle HFK$ 。因为 $\angle AEM=\angle AFK=\angle HFK$ ， $\angle HEM=\angle HNK$ ，所以 $\angle HEM=2\angle AEM$ ，即 AE 平分 $\angle HEM$ ，因为 $NH=NK$ ，所以 EN 平分 $\angle HEK$ ，故 $AE \perp EN$ 。

6、如图，四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形， BA, CD 交于 P ， BC, AD 不平行， E, F 在 CD 上， $\triangle BCE, \triangle AFD$ 的外心分别为 G, H ， G, H, P 共线，求证： A 、

B 、 E 、 F 共圆。



证明：过 B 、 A 、 F 作圆交 CD 于 E_1 ，设 $\triangle BCE_1$ 的外心分别为 G_1 。

因为 $\angle ADP = \angle ABC$ ， $\angle AFD = \angle ABE_1$ ，所以 $\angle FAD = \angle CBE_1$ ，从而 $\angle CG_1E_1 = \angle FHD$ 。

因为 $PC \cdot PD = PA \cdot PB = PE_1 \cdot PF$ ，所以 $\frac{PD}{PF} = \frac{PE_1}{PC}$ ，因为 $\frac{PD}{PF} = \frac{DH \sin \angle DHP}{FH \sin \angle FHP}$ ，

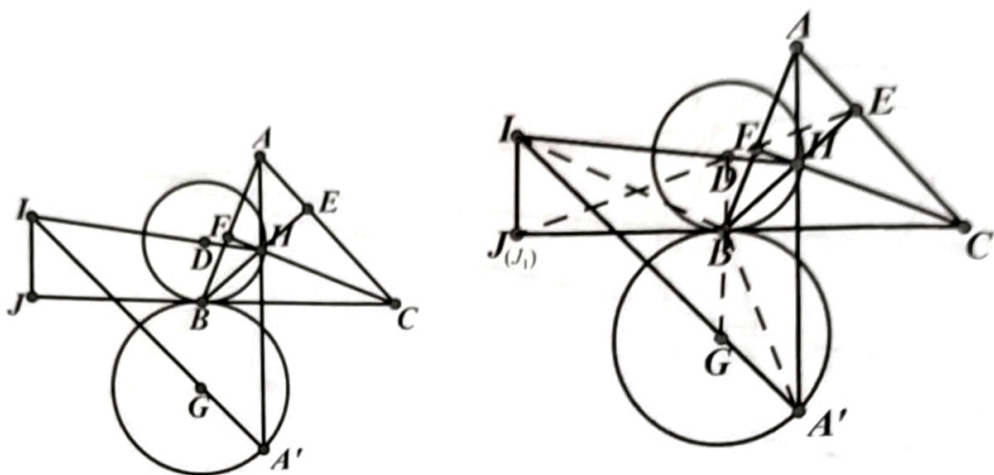
$$\frac{PE_1}{PC} = \frac{G_1E \sin \angle E_1G_1P}{G_1C \sin \angle CG_1P}，所以 \frac{\sin \angle DHP}{\sin \angle FHP} = \frac{\sin \angle E_1G_1P}{\sin \angle CG_1P}，$$

因为 $\angle FHP - \angle DHP = \angle FHD = \angle CG_1E_1 = \angle CG_1P - \angle E_1G_1P$ ，所以 $\angle FHD = \angle CG_1P$ 。

因为 $\angle HFD = \angle G_1CP$ ，所以 $\angle HPF = \angle G_1PC$ ，于是 P 、 G_1 、 H 共线，由于 G_1 、

G 都是 BC 垂直平分线与 PH 的交点，所以 G_1 、 G 重合，从而 E_1 、 E 重合，故 A 、 B 、 E 、 F 共圆。

7、如图， $\triangle ABC$ 中， $BE \perp AC$ 于 E ， $CF \perp AB$ 于 F ， H 为垂心， A 关于 BC 的对称点为 A' ，作过 H 、 B 且切于 BC 的圆 D ，过 A' 、 B 且切于 BC 的圆 G ， $A'G$ 与 HD 相交于 I ，过 I 作 $IJ \perp BC$ 于 J ，证明： E 、 F 、 J 共线。



证明：设延长 EF 交 CB 于 J_1 ，连接 IJ_1 ，只需证明 $IJ_1 \perp BC$ 。连接 BD 、 BG 、 BI 、 BA' 。

由 $DB=DH$ ， $DB \parallel HA'$ ，易得 BH 平分 $\angle IHA'$ ，由 $GB=GA'$ ， $BG \parallel HA'$ ，易得 $A'B$ 平分 $\angle IAH$ ，所以 B 为 $\triangle IHA'$ 的内心，所以 $\angle HIB = \frac{1}{2} \angle HIA' = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle IHA' - \angle IAH) = 90^\circ - \angle BHA' - \angle BA'H = 90^\circ - \angle ACB - \angle BAH = 90^\circ - \angle BAH - \angle ACB = \angle ABC - \angle ACB$ ，因为 $\angle FJ_1B = \angle ABC - \angle J_1FB = \angle ABC - \angle ACB$ ，所以 $\angle HIB = \angle FJ_1B$ 。因为 $\angle J_1FB = \angle ACB = \angle BHA' = \angle BHI$ ，所以 $\triangle IBH \sim \triangle J_1BF$ ，由此可得 $\triangle IBJ_1 \sim \triangle HBF$ ，所以 $\angle IJ_1B = \angle HFB = 90^\circ$ ，即 $IJ_1 \perp BC$ ，于是 J_1 与 J 重合，故 E 、 F 、 J 共线。

8、如图 1，设 Z 是 $\triangle ABC$ 内一点， $ZB \perp ZC$ ， BZ 交 AC 于 B_1 ， CZ 交 AB 于 C_1 ，过 Z 且与 AZ 垂直的直线分别交 AB 、 AC 于 E 、 F ，求证：

$$\left(\frac{BB_1}{ZB \cdot ZB_1} \right)^2 + \left(\frac{CC_1}{ZC \cdot ZC_1} \right)^2 = \left(\frac{EF}{ZE \cdot ZF} \right)^2.$$

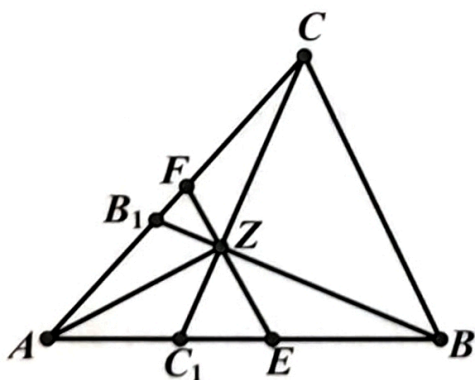


图 1

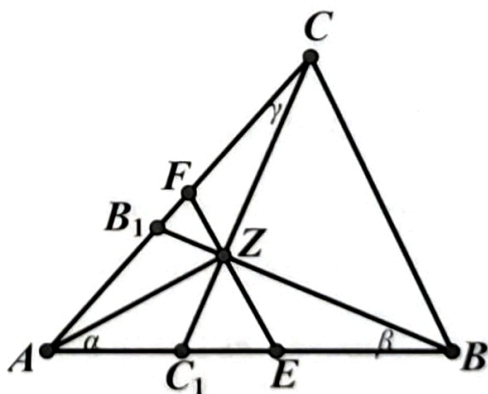


图 2

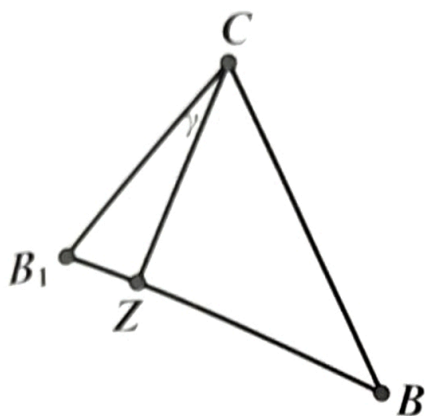


图 3

分析与解答:

如图 2, 为了叙述方便, 我们设 $\angle BAZ = \alpha$, $\angle ABZ = \beta$, $\angle ACZ = \gamma$, 并用 A 、 B 、 C 分别表示 $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 。

$\left(\frac{BB_1}{ZB \cdot ZB_1}\right)^2$ 、 $\left(\frac{CC_1}{ZC \cdot ZC_1}\right)^2$ 、 $\left(\frac{EF}{ZE \cdot ZF}\right)^2$ 具有相同的结构, 我们可以使用同样的方式进行表示, 比如 $\left(\frac{BB_1}{ZB \cdot ZB_1}\right)^2$, 我们可以考察局部图形 (3),

$$\begin{aligned} \left(\frac{BB_1}{ZB \cdot ZB_1}\right)^2 &= \left(\frac{ZB + ZB_1}{ZB \cdot ZB_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{ZB} + \frac{1}{ZB_1}\right)^2 = \left(\frac{ZC}{ZB} + \frac{ZC}{ZB_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{ZC^2} \\ &= [\cot \gamma + \cot(C - \gamma)]^2 \cdot \frac{1}{ZC^2} = \left[\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} + \frac{\cos(C - \gamma)}{\sin(C - \gamma)}\right]^2 \cdot \frac{1}{ZC^2} = \left[\frac{\sin C}{\sin \gamma \sin(C - \gamma)}\right]^2 \cdot \frac{1}{ZC^2} \end{aligned}$$

$$\text{同理} \left(\frac{CC_1}{ZC \cdot ZC_1}\right)^2 = \left(\frac{\sin B}{\sin \beta \sin(B - \beta)}\right)^2 \cdot \frac{1}{ZB^2}, \quad \left(\frac{EF}{ZE \cdot ZF}\right)^2 = \left(\frac{\sin A}{\sin \alpha \sin(A - \alpha)}\right)^2 \cdot \frac{1}{ZA^2}.$$

于是只需证

$$\left(\frac{\sin C}{\sin \gamma \sin(C - \gamma)}\right)^2 \cdot \frac{1}{ZC^2} + \left(\frac{\sin B}{\sin \beta \sin(B - \beta)}\right)^2 \cdot \frac{1}{ZB^2} = \left(\frac{\sin A}{\sin \alpha \sin(A - \alpha)}\right)^2 \cdot \frac{1}{ZA^2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2}{\sin^2 \gamma \sin^2(C - \gamma)} \cdot \frac{1}{ZC^2} + \frac{AC^2}{\sin^2 \beta \sin^2(B - \beta)} \cdot \frac{1}{ZB^2} = \frac{BC^2}{\sin^2 \alpha \sin^2(A - \alpha)} \cdot \frac{1}{ZA^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2 \sin^2 \alpha \sin^2(A - \alpha)}{BC^2 \sin^2 \gamma \sin^2(C - \gamma)} \cdot \frac{ZA^2}{ZC^2} + \frac{AC^2 \sin^2 \alpha \sin^2(A - \alpha)}{BC^2 \sin^2 \beta \sin^2(B - \beta)} \cdot \frac{ZA^2}{ZB^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2 \sin^2 \alpha \sin^2(A - \alpha)}{BZ^2 \sin^2 \gamma} \cdot \frac{ZA^2}{ZC^2} + \frac{AC^2 \sin^2 \alpha \sin^2(A - \alpha)}{CZ^2 \sin^2 \beta} \cdot \frac{ZA^2}{ZB^2} = 1$$

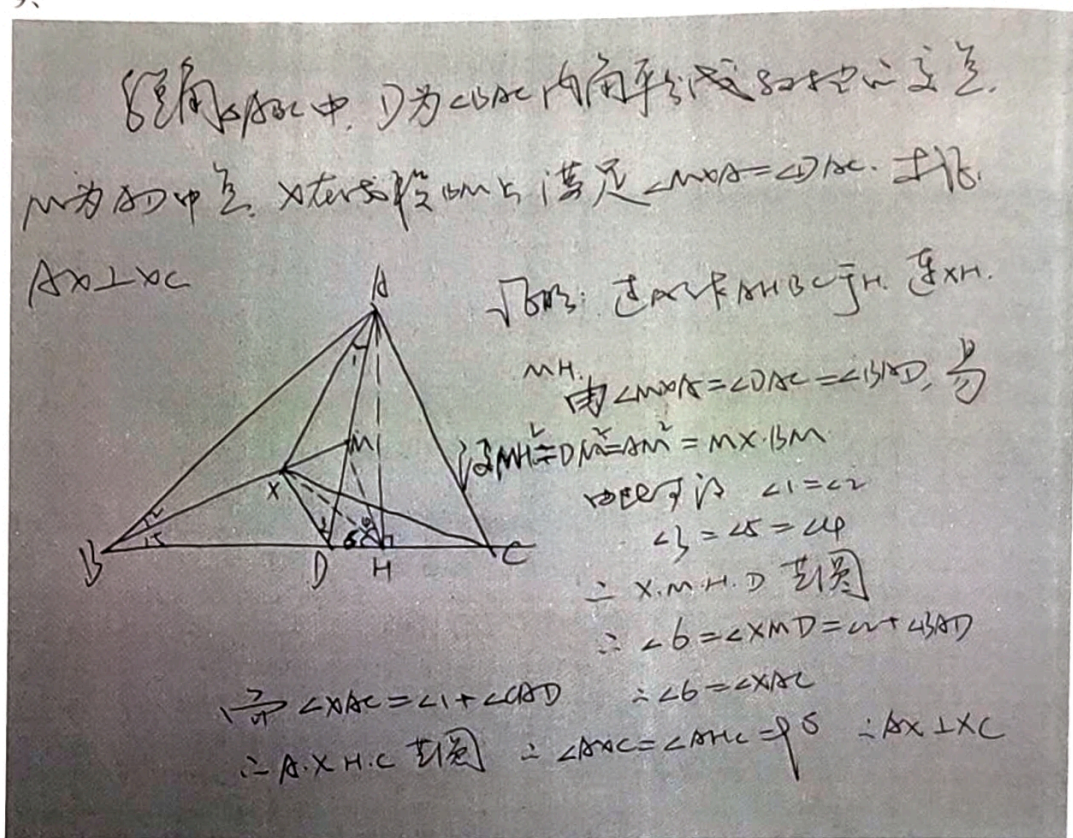
$$\text{由 } \frac{AB}{\sin \angle AZB} = \frac{BZ}{\sin \alpha} \Rightarrow AB \sin \alpha = BZ \sin \angle AZB,$$

$$\frac{AC}{\sin \angle AZC} = \frac{CZ}{\sin(A-\alpha)} \Rightarrow AC \sin(A-\alpha) = CZ \sin \angle AZC,$$

$$\frac{ZA}{ZC} = \frac{\sin \gamma}{\sin(A-\alpha)}, \frac{ZA}{ZB} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \text{ 知只需证 } \sin^2 \angle AZB + \sin^2 \angle AZC = 1,$$

由 $\angle AZB + \angle AZC = 270^\circ$, 易知其成立。

9、

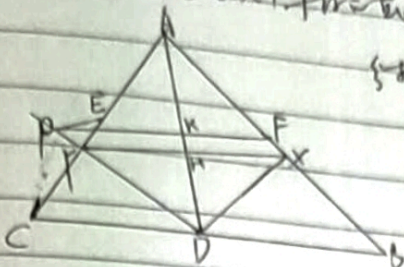


其他解法: 引入内心 I , 证明 B, X, I, C 四点共圆, 用阿氏圆可以, 要么引入旁心 J 证明 $MI \cdot MJ = MX \cdot MB$. 不引入旁心也可以, 引入 $\triangle BIC$ 的外心也可以. 实质是一样的。

10、锐角 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别为 BC, AC, AB 中点, X, Y 为 D 在 AB, AC 上垂足, 过 F 且与 XY 平行的直线与 DY 交于 P , 求证: $AD \perp EP$ 。

证明

6. 在 $\triangle ABC$ 中, D, E, F 分别在 BC, AC, AB 中点, X 在 AD 上, Y 在 BE 上, Z 在 CF 上, 且 $AX = BY = CZ$. 求证: $AD \perp BC$.



由 $AX = BY = CZ$, 得 $\angle AXG = \angle BYG = \angle CZG$

$$\Rightarrow \triangle AXG \cong \triangle BYG \cong \triangle CZG$$

$$\Rightarrow AG \cdot DG = BG \cdot EG = CG \cdot FG$$

又 $AG \cdot DG = BG \cdot EG = CG \cdot FG$

$$\Rightarrow AG \cdot DG = BG \cdot EG = CG \cdot FG$$

$$= \frac{AG}{BG} \cdot \frac{DG}{EG} = \frac{AG}{BG} \cdot \frac{AG}{BG} \cdot \frac{DG}{EG}$$

$$= \frac{AG}{BG} \cdot \frac{AG}{BG} \cdot \frac{DG}{EG}$$

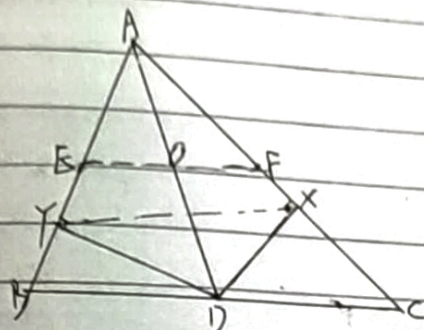
$$= \frac{AG}{BG} \cdot \frac{AG}{BG} \cdot \frac{DG}{EG}$$

$$= \frac{AG}{BG} \cdot \frac{AG}{BG} \cdot \frac{DG}{EG}$$

$$\Rightarrow DG \cdot EG = FG \cdot DG \quad \text{由}$$

(即 $AD \perp BC$)

证法二: 设 AD 与 BE 交于 G



$$\Rightarrow \frac{a}{2} \sin C \cdot \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2} \cos B \right) = \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \cos C \right) \cdot \frac{a}{2} \sin B$$

$$\Rightarrow \sin C (\sin C - \sin A \cos B) = (\sin B - \sin A \cos C) \sin B$$

$$\Rightarrow \sin C (\sin A \cos B - \sin A \cos C) = (\sin A \cos C - \sin A \cos B) \sin B$$

$$\Rightarrow \sin C \cos A \sin B = \sin A \sin C \sin B$$

由 $\sin B \neq 0$

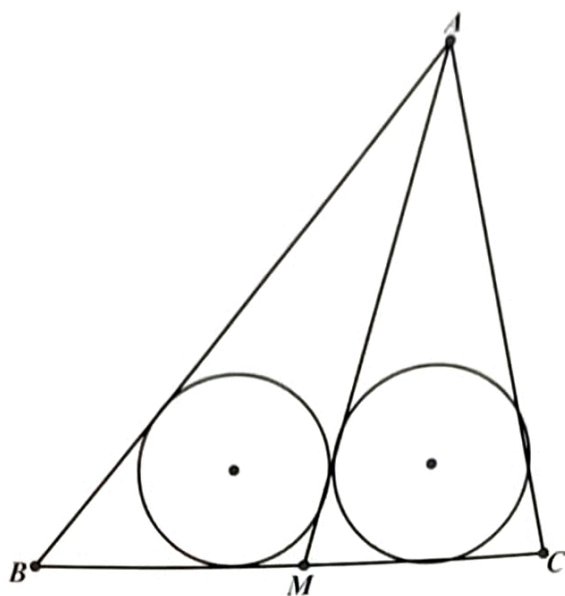
为 $\frac{1}{2} \sin B$ 则 $\sin C \cos A = \sin A \sin C$ 即 $\cos A = \sin A$ 故 $A = 45^\circ$

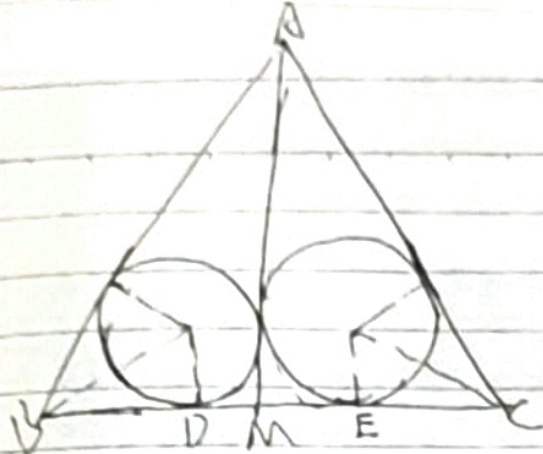
又 $\angle B = 45^\circ$ 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 故 $AD \perp BC$

另法: 设 AD 与 BE 交于 G , 则 $AG = \frac{2}{3} AD$, $GD = \frac{1}{3} AD$, 同理 $BG = \frac{2}{3} BE$, $GE = \frac{1}{3} BE$, $CG = \frac{2}{3} CF$, $GF = \frac{1}{3} CF$

由 $AX = BY = CZ$ 得 $AG = BG = CG$, 故 G 为 $\triangle ABC$ 的外心, 故 $AD \perp BC$

11. 如图, M 点在三角形 ABC 的 BC 边上, AM 将 $\triangle ABC$ 分成两个内切圆相等的三角形 (图中的两个圆), 求证: $AM^2 = p(p-a)$. (其中 p 是三角形 ABC 的半周长)





设两圆的半径为 r

$$\therefore BD = \frac{AB + BM - AM}{2}$$

$$CE = \frac{AC + CN - AN}{2}$$

$$\therefore BD + CE = \frac{AB + BC + AC - 2AM}{2}$$

$$\therefore BD + CE = r \cot \frac{B}{2} + r \cot \frac{C}{2} = r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$$

$$\therefore S_{\triangle BDM} + S_{\triangle CEN} = S_{\triangle BDC} \quad \therefore \frac{AB + BC + AC - 2AM}{2} \cdot r = r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \quad \text{①}$$

$$\therefore \frac{1}{2} (AB + BC + AC) r + \frac{1}{2} (AC + CN + AN) r = S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{AB + BC + AC + 2AM}{2} \cdot r = S_{\triangle ABC} \quad \text{②}$$

$$\text{由①②得} \quad \frac{(AB + BC)^2 - 4AM^2}{4} = S_{\triangle ABC} \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$$

$$\therefore AM^2 = \frac{(AB + BC)^2}{4} - S_{\triangle ABC} \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \quad \text{③}$$

$$\text{由③得} \quad \frac{(AB + BC)^2}{4} = S_{\triangle ABC} \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$$

$$\frac{P}{4} = pr \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) = pr \cdot \frac{3}{r} \quad \therefore r = \frac{P}{4}$$

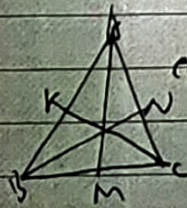
$$\therefore AM^2 = S_{\triangle ABC} \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) - S_{\triangle ABC} \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$$

$$= S_{\triangle ABC} \cdot \cot \frac{A}{2} \quad \text{④}$$

又对 $\vec{AM} = p\vec{AP} - a\vec{AB}$ 而 $\vec{AM}$ 与 $\vec{AP}$ 共线
 故 $\vec{AM}$ 与 $\vec{AP}$ 共线 ③ 证毕

$$\begin{aligned}\vec{AM} &= \frac{(\vec{AB} + \vec{AC})}{2} - \frac{a}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \\ &= \vec{p} - \vec{pr} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \\ &= \vec{p} - \vec{pr} \cdot \frac{a}{p} \\ &= \vec{p} - \vec{pa} \\ &= \vec{p} - \vec{ap}\end{aligned}$$

拓展题目:



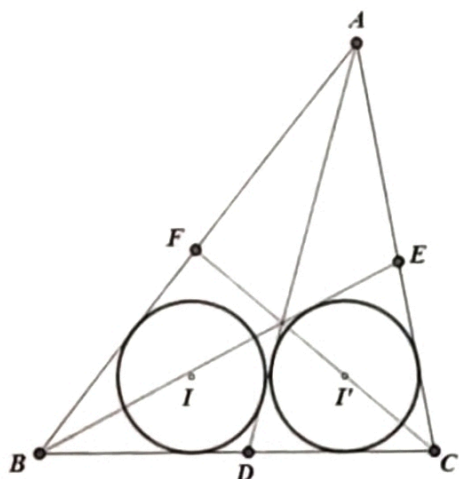
m, n, ck 为边长上而中线 = $\frac{1}{2}$
 中线, am, bn, ck 共点

m, n, ck 为边长上而中线 = $\frac{1}{2}$
 中线, am, bn, ck 共点

(4)



由此不难证明下题:

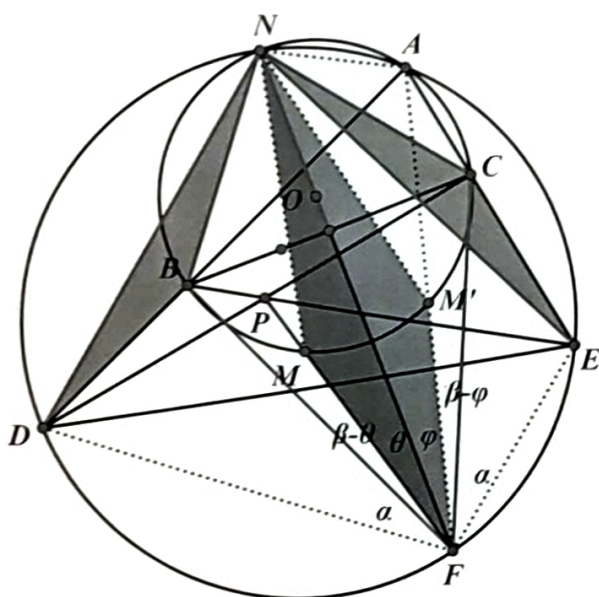
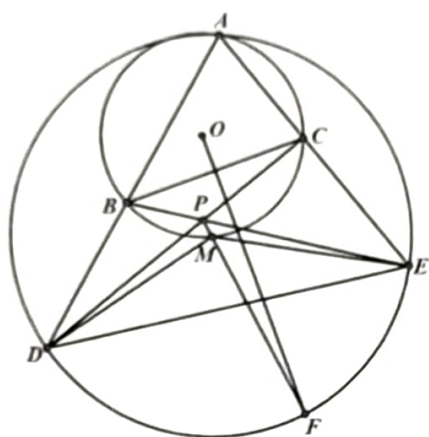


如图, D 点在三角形 ABC 的 BC 边上, AD 将三角形 ABC 分成两个内切圆相等的三角形(图中的两个绿圆), 同样定义 BE, CF , 则有

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = p^2$$

其中 p 是三角形 ABC 的半周长。

12、如图, 已知 $\triangle ABC$, 延长 AB, AC 分别至点 D, E , 使得 $BD = CE$, BE 与 CD 交于点 P , BC 垂直平分线交 $\triangle ADE$ 外接圆 DE 弧 (不含点 A) 于点 F , FP 交 $\triangle ABC$ 外接圆的 BC 弧 (不含点 A) 于点 M , 求证: $MD = ME$ 。



注意到 $BD=CE$, $BF=CF$, 而 $\angle E$ 和 $\angle BDF$ 互补, 根据 SSA 或者正弦定理, 知 $\angle BFD = \angle DFE$, 记为 α , 记 $\angle NFB = \angle NFC = \beta$, $\angle NFM = \theta$, $\angle NFA = \varphi$ 。

逻辑段 1

先取圆 ABC 的北极点 N , 然后得到 $\triangle NBD$ 和 $\triangle NCE$ 全等, 进而得到 N 为圆 ADE 的北极点。

因此 N 为两圆的公共弦不同于 A 的端点, N, O, F 共线。

逻辑段 2—刻画点 P 的位置 (NF 平分 $\angle PEA$)

利用第二角元梅涅劳斯定理处理。

$$\frac{DB}{BA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CP}{PD} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta + \varphi)} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta - \varphi)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(\beta + \theta)}{\sin(\alpha + \beta - \varphi)} = 1 \Rightarrow \theta = \varphi。$$

逻辑段 3

取 M' 和 M 关于 NF 对称, $\angle AM'N = \angle NCA$, 于是 $\triangle NM'F \sim \triangle NEC$, 即 $\angle MNF = \angle DNB$,

不难得到 $MN \perp DE$, 从而得证。

如图, 设 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 的外心分别为 O 、 O' , BAC 的中点为 N .

因 $NB=NC$, $\angle NDA=\angle NCA$, $BD=CE$,
则 $\triangle NBD \cong \triangle NCE$, 从而, $\angle NDB=\angle NEC$.

于是, N 、 D 、 E 、 A 四点共圆.

设 NO 交 $\odot O$ 于点 N 、 M .

下面证明 P 、 M 、 F 三点共线, 从而 M 与 M' 重合. 考虑到 NM 是 DE 的中垂线, 有 $MD=ME$.

P 、 M 、 F 三点共线 $\Leftrightarrow \angle NFP=\angle NFM$.

因 $\angle NM'O=\angle ONM'=\angle OFO$,

则 O 、 M 、 F 、 O 四点共圆.

所以, $\angle NFM=\angle ONM'=\frac{1}{2}\angle AON=\angle AFN$.

由 $\triangle NBD \cong \triangle NCE$ 得 $ND=NE$.

则 $\angle NFD=\angle NFE$.

因 NF 为 BC 的中垂线, 则 $BF=CF$.

于是, $\frac{BD}{\sin \angle BFD} = \frac{BF}{\sin \angle BDF} = \frac{CF}{\sin \angle CEF} = \frac{CE}{\sin \angle CFE}$

$\Rightarrow \sin \angle BFD = \sin \angle CFE \Rightarrow \angle BFD = \angle CFE$

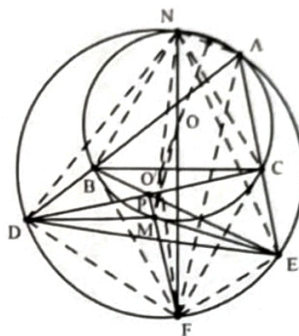
对完全四边形 $ABDPEC$ 及点 F , 由等角线定理得

$\angle BFD = \angle AFC$

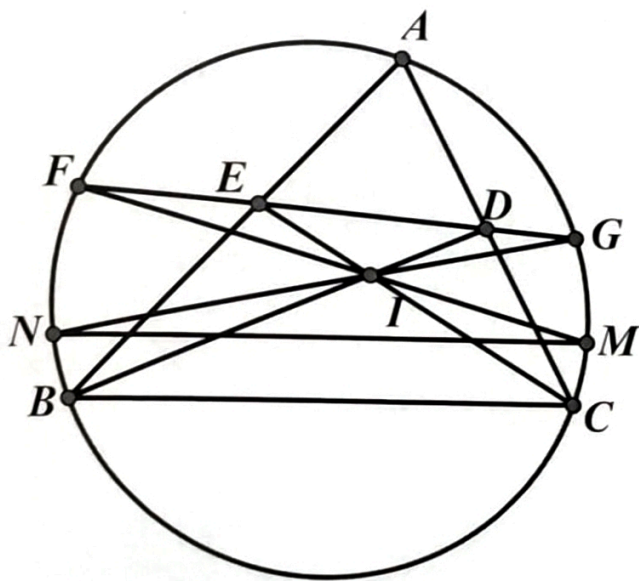
又 NF 为 BC 的中垂线,

则 $\angle NFP = \angle AFN$,

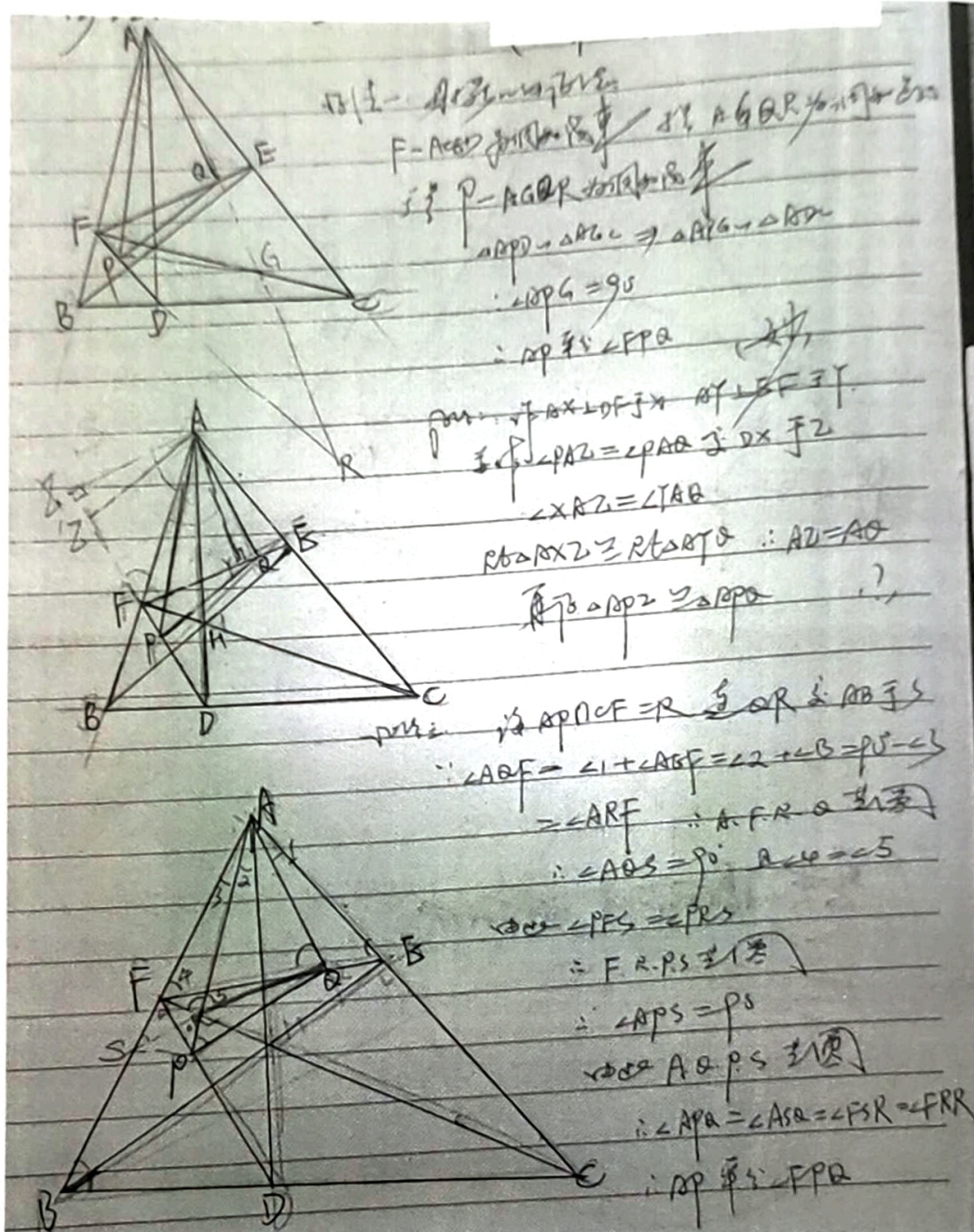
于是, $\angle NFM = \angle NFP$ 证毕.

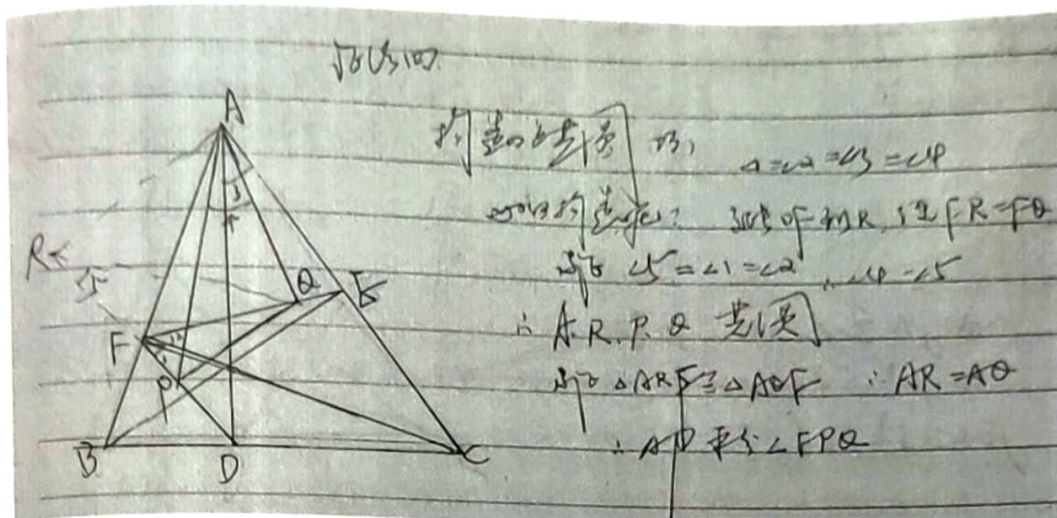


- 13、如图, I 为 $\triangle ABC$ 的内心, BI 交 AC 于 D , CI 交 AB 于 E , 直线 DE 交外接圆于 F 、 G , FI 、 GI 分别交 $\triangle ABC$ 外接圆于 M 、 N , 连 MN , 求证: $MN \parallel BC$.

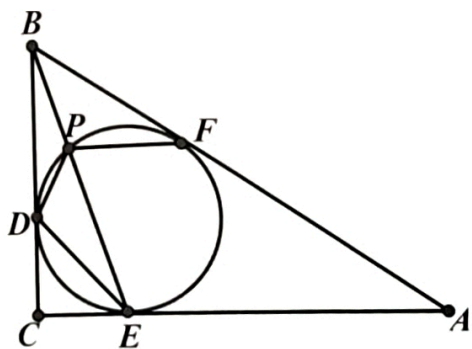


- 14、 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 、 F 为垂足, H 为垂心, P 在 DF 上, Q 在 EF 上, 满足 $\angle PAQ = \angle DAE$, 且同向. 求证: AP 是 $\angle FPQ$ 的角平分线. (从而 A 为 $\triangle FPQ$ 的旁心)

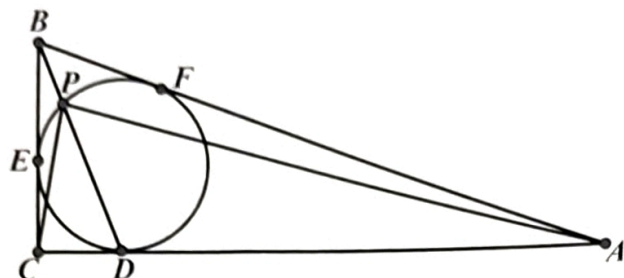




- 15、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，内切圆与三边的切点分别为点D、E、F，BE又交内切圆于点P，已知 $PA \perp PD$ 。求证： $PF \parallel AC$ 。

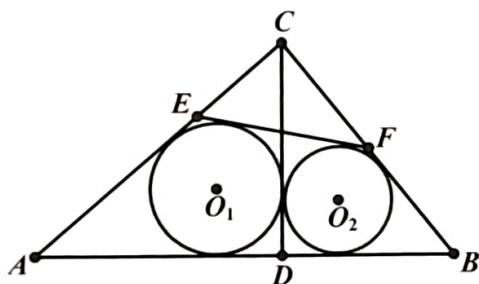


16、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，内切圆与三边的切点分别为点 D 、 E 、 F ，连接 AD ，与内切圆交于点 P ，连 BP 、 CP ，若 $\angle BPC = 90^\circ$ 。求证： $AE + AP = PD$ 。

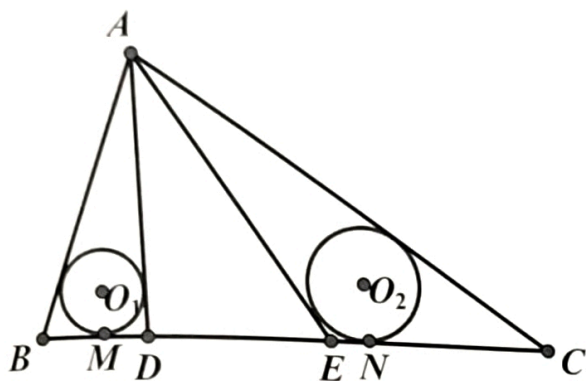


17、在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的 BC 弧（不含点 A ）上一点， I 、 J 分别为 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的内心。求证： $BI^2 + CJ^2 = IJ^2$ 。

18、如图， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，圆 O_1 、圆 O_2 分别内切于 $\triangle ACD$ ， $\triangle BCD$ ， EF 为两圆公切线，求证： A 、 B 、 F 、 E 共圆。



- 19、如图， $\angle BAD = \angle CAE$ ，圆 O_1 、圆 O_2 分别内切于 $\triangle ABD$ ， $\triangle ACE$ ， M 、 N 为切点，求证： $\frac{1}{BM} + \frac{1}{DM} = \frac{1}{CN} + \frac{1}{EN}$ 。



- 20、在正 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任取一点 D ，设 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的内心分别为 I_1 、 I_2 ，外心分别为 O_1 、 O_2 ，求证：(1) $I_1O_1^2 + I_2O_2^2 = I_1I_2^2$ ；(2) 设直线 I_1O_1 与 I_2O_2 交于点 P ，则 $PD \perp BC$ 。

高一数论

1. 设 a, b 是正整数, 且 $a + 77b$ 可以被 79 整除, $a + 79b$ 可以被 77 整除, 求 $a + b$ 的最小值。

2. 已知正整数 $n \geq 2$, p 为素数, 若 $n \mid p-1$, $p \mid n^3-1$, 证明 $4p-3$ 是完全平方数。

3. 已知正整数 m, n 满足 $m \geq 3, n > m(m-2)$, 求正整数 d 的最大值, 使得对于每个 $k \in \{m, m+1, \dots, n\}$, 均有 $d \mid n!$, 且 k 不整除 d 。

4. 求所有正整数 N , 使得存在正整数 x, y 满足 $x + y = N$, 且 $N \mid xy$ 。

5. 若正整数 n 的每个因数 $d (1 < d < n)$ 等于 n 的两个正因数 d_1, d_2 的差, 则称 n 为“好数”, 求大于 401 且为 401 的倍数的最小的好数。

6. 求所有正整数 n , 使得 $\frac{10^n}{n^3 + n^2 + n + 1}$ 是正整数。

7. 已知整数 x, y 满足 $x \neq -1, y \neq -1$, 且使得 $\frac{x^4-1}{y+1} + \frac{y^4-1}{x+1}$ 是整数, 求证 $x^4 y^{44} - 1$ 能被 $x+1$ 整除。

8. 求所有正整数 a , 使得对于任意正整数 n , $n(n+a)$ 均不是完全平方数。

9. 求所有素数 p , 使得 $p^3 - 4p + 9$ 为完全平方数。

10. 已知正整数 k , 对于任意正整数 n , 定义 $f_k(n)$ 是大于 kn , 且使得 $nf_k(n)$ 为完全平方数的最小正整数, 证明 $f_k(m) = f_k(n)$ 当且仅当 $m = n$ 。

11. 求正整数 n , 使得至少存在两个正整数对 (x, y) 满足 $\frac{x^2+y}{xy+1} = n$ 。

12. 证明正整数 n 可以被 4 整除的充分必要条件是存在 n 个整数, 其积为 n , 其和为零。

13. 对于任意大于 1 的整数 n , 证明存在 n 个互不相等的正整数, 其中任意两个的和整除这 n 个正整数的积。

14. 证明对于任意的正整数 $n \geq 2$, 都存在 n 个互不相同的正整数组成的集合 M , 使得对于任意 $a, b \in M, a \neq b$, 均有 $|a-b|$ 整除 $a+b$ 。

15. 证明对于每个非负整数 n , $7^{7^n} + 1$ 至少是 $2n+3$ 个素数的乘积 (可以相同)。

16. 设 n 是正整数, 证明存在整数 m , 使得 $2^n \mid (2024m^2 + 20242023m + 2023)$ 。

17. 求所有函数 $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$, 使得对于任意的正整数 m, n , 均有

$$(n+f(m)) \mid (f(n)+nf(m)).$$

18. 贝蒂定理: 设 α, β 是正无理数, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, 则两个数列

$$[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \dots; [\beta], [2\beta], [3\beta], \dots$$

加起来恰不重复地构成正整数集。

19. 对于任意一个正整数 k , 设 $f_1(k)$ 是 k 的所有数码的和的平方, 若 $f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k))$, 求 $f_{2024}(2^{2023})$ 。

20. 已知整数 $k > 5$, 用 k 进制表示给定的正整数, 将这个 k 进制的数的各位数码之和与 $(k-1)^2$ 的积写在给定的正整数的后面, 对于所得到的新的数, 继续这种运算, 得到一个数列, 证明从某个数开始, 其后面的数全相等。

21. 若一个正整数能表示为 $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_{100}}$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ 为非负整数 (允许相同), 则称此数为“好的”, 求最小的正整数 n , 使得 n 的任意正整数倍均不是好的。

22. 已知 x, y, z 为正整数, 且满足 $z(xz+1)^2 = (5z+2y)(2z+y)$, 证明 z 为奇数, 且是完全平方数。

23. 求所有正整数 n , 满足存在正整数 a, b, c , 使得 $n = [a, b] + [b, c] + [c, a]$ 。

24. 证明存在连续的 1000 个正整数, 其中恰有 10 个素数。

25. 将素数从小到大排列为 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$, 设 $s_n = \sum_{i=1}^n p_i$, 求证对于任意正整数 n , 存在一个完全平方数 a_n , 使得 $s_n < a_n < s_{n+1}$ 。

26. 证明 (1) 对于任意正整数 m , 有 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^m} < m$; (2) 若 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是小于 2^{100} 的所有素数由小到大的排列, 则 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} < 10$ 。

27. 对于任意正整数 $n \geq 2$, 记 $p(n)$ 为 n 的最大素因数, 证明存在无穷多个正整数 n , 使得 $(p(n+1) - p(n))(p(n) - p(n-1)) > 0$ 。

28. 设 a, b 是不等的整数, n 为正整数, 若 $n \mid (a^n - b^n)$, 证明 $n \mid \frac{a^n - b^n}{a - b}$ 。

29. 证明对于任意正整数 k , $(k^2)! \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$ 为整数。

30. 求最小的正整数 m ，使得对于所有的正整数 $n \geq m$ ，都存在非负整数 a, b ，使得 $n = 5a + 11b$ 。

31. 已知 a, b 是给定的互素的正整数，对于正整数 n ，若不存在非负整数 x, y ，使得 $ax + by = n$ ，则称 n 为“弱的”，证明若 n 为弱的，且 $n < \frac{ab}{6}$ ，则存在正整数 $k \geq 2$ ，使得 kn 为弱的。

32. 设正整数 $n \geq 3$ ， $S = \{k | k \in \mathbb{Z}^+, (k, n) = 1, (k+1, n) = 1, 1 \leq k \leq n-1\}$ ，求 $\prod_{k \in S} k$ 除以 n 的余数。

33. 求所有的正整数 $n (n \geq 2)$ ，在十进制中，一切由 $n-1$ 个 1 及 1 个 7 构成的 n 位数都是素数。

34. 已知正整数 $n \geq 2$ ，证明存在一个大于 n^n 的正整数 m ，使得 $\frac{n^m - m^n}{n + m}$ 为正整数。

35. 已知正整数 a 满足对于任意的正整数 n ， $n^2 a - 1$ 均有一个大于 1 且模 n 余 -1 的真因数，证明 a 为完全平方数。

36. (1) 是否存在正整数 a, b ，使得对于任意正整数 n ，数 $2^n a + 5^n b$ 是完全平方数？(2) 是否存在正整数 a, b, c ，使得对于任意正整数 n ，数 $2^n a + 5^n b + c$ 是完全平方数？

37. 已知 p 为素数，对于任意正整数 $k (1 \leq k \leq p-1)$ ，设 a_k 为 $kp+1$ 的不小于 k 且小于 p 的因数的个数，求 $\sum_{k=1}^{p-1} a_k$ 的值。

38. 已知正整数 n 为给定的正整数，求最小的正整数 k ，使得在任意 k 个非负整数中，均存在偶数个数，他们的和是 n 的倍数。

39. 已知 n 为正整数， $S = \{0, 1, 1+2, 1+2+3, \dots, 1+2+3+\dots+(n-1)\}$ ，(1) 若 n 为 2 的整数次幂，证明 S 的所有元素模 n 不同余；(2) 若 n 不是 2 的整数次幂，证明存在 S 中的两个元素模 n 同余。

40. 已知 p 为奇素数， $a_1, a_2, \dots, a_{p-2}$ 为一列正整数，使得对于 $k \in \{1, 2, \dots, p-2\}$ ，均有 p 不整除 a_k ， p 不整除 $a_k^k - 1$ ，证明在 $a_1, a_2, \dots, a_{p-2}$ 中存在若干个数，它们的乘积模 p 余 2。

41. 设正整数 $n \geq 4$ ， $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 2n)$ 是 n 个不同的正整数，证明集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 存在一个子集，其元素的和被 $2n$ 整除。

42. 已知正整数 a , S_a 是由素数构成的集合, 且满足: 对于任意的 $p \in S_a$, 存在一个奇数 b , 使得 $p \mid 2^{2^b} - 1$, 证明对于任意正整数 a , 存在无穷多个素数不在 S_a 中。

43. 已知素数 $p \geq 2$, 甲乙轮流玩游戏: 有 p 格空盒排成一排, 记每次操作是当前的玩家放一个数码到其中的一个盒子中, 甲先开始, 游戏结束后, 所有的盒子均放有数码, 且得到一个 p 位数 M , 在这些数码中, 允许放置数码 0。若 $p \mid M$, 则甲获胜; 否则乙获胜, 证明甲有获胜策略。

44. 设 $c, n (c < n)$ 为正整数, 玛丽的老师在黑板上写了 n 个正整数, 对于任意的 c, n , 玛丽是否总能找到这 n 个正整数的一个排列 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 使得 $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \cdots (a_{n-1} - a_n)(a_n - a_1)$ 模 n 与 0 或 c 同余。

45. 试求所有的素数对 (p, q) , 使得 $p^p + q^q + 1$ 能被 pq 整除。

46. 已知正整数 $n \geq 2$, 证明若存在正整数 b , 使得 $\frac{b^n - 1}{b - 1}$ 是某个素数的正整数次幂, 则 n 一定是素数。



手机扫描二维码答题



学大伟业[®]

www.xuedaweiy.com

共育人才 开创未来



北京学大伟业教育科技有限公司

群名称 : 学大伟业2024数学竞赛 群号 : 796243509 (仅限学员进群, 需要实名验证)
群名称 : 学大伟业2024物理竞赛 群号 : 868700114 (仅限学员进群, 需要实名验证)
群名称 : 学大伟业2024化学竞赛 群号 : 894128581 (仅限学员进群, 需要实名验证)
群名称 : 学大伟业2024生物竞赛 群号 : 894116899 (仅限学员进群, 需要实名验证)

数竞学员2群 : 562479146 (仅限学员入群)	数竞学员1群 : 229195762 (仅限学员入群)
物竞学员2群 : 528266191 (仅限学员入群)	物竞学员1群 : 434514281 (仅限学员入群)
化竞学员2群 : 623401434 (仅限学员入群)	化竞学员1群 : 280741975 (仅限学员入群)
生竞学员2群 : 104903318 (仅限学员入群)	生竞学员1群 : 314648913 (仅限学员入群)
信息学员2群 : 414668705 (仅限学员入群)	信息学员1群 : 529380228 (仅限学员入群)
强基学员2群 : 651658136 (仅限学员入群)	强基学员1群 : 435142955 (仅限学员入群)
高考学员2群 : 651662537 (仅限学员入群)	高考学员1群 : 203795067 (仅限学员入群)