44 不妨假设 $x>0, y>0, z=-t<0$ 只需求 $S(x,y,t)=|x+y-t|$

的最大值. 设 $f(u)=u+\frac{1}{u}$ $(u\geq 1)$, 则 $f(u)$ 单调递增. 由

$f(x)+f(y)=f(t)$ 则 $f(t)=(x+y)+\frac{x+y}{xy} > (x+y)+\frac{1}{x+y}=f(x+y)$

$\therefore t>x+y$, $\therefore S(x,y,t)=t-(x+y)$. $(x+y)^2>xy$

二 引理. 固定 x. 对于 x,y,t 及 x,y',t' 若 $y'<y$ 则 $\underset{=S(x,y,t)}{t-(x+y)} < \underset{=S(x,y',t')}{t'-(x+y')}$

$f(x)+f(y)=f(t)$ ① $f(x)+f(y')=f(t')$ ②

证明 $\because f(y')<f(y)$. 由①②可得 $f(t')<f(t) \Rightarrow t'<t$

$\because t>x+y>1$ $t'>x+y'>1$ $1<y't'<yt$

$1>\frac{1}{y't'}>\frac{1}{yt}$ $0<1-\frac{1}{y't'}<1-\frac{1}{yt}$

由①② $f(t)-f(y)=f(x)=f(t')-f(y')$

$(t-y)(1-\frac{1}{ty}) = t-y+\frac{y-t}{ty}$ $t'-y'+\frac{y'-t'}{t'y'}=(t'-y')(1-\frac{1}{t'y'})$

$\therefore t-y < t'-y' \Rightarrow S(x,y,t) < S(x,y',t')$

由引理可得 $S(x,y,t) \le S(x,1,t_1) \le S(1,1,t_2) = 2+\sqrt{3}-1-1 = \sqrt{3}$

(由 x,y 的对称性)

其中 t_2 满足 $f(t_2) = f(1)+f(1)$ 即 $t_2 + \frac{1}{t_2} = 2+2$ $\therefore t_2 = 2+\sqrt{3}$

当 $x=1,\ y=1,\ z=-(2+\sqrt{3})$ 时 $(x+y+z)_{max} = \sqrt{3}$.

3

45 $\sum \frac{x^2y^2}{1-z} + 3xyz \le k$ ①

在①中取 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 可得 $k \ge \frac{1}{6}$. 当 $k=\frac{1}{6}$ 下证明

$$\sum \frac{x^2y^2}{1-z} + 3xyz \le \frac{1}{6} \quad ②$$

②左 $= xyz\left(\sum \frac{xy}{z(1-z)} + 3\right) = xyz \cdot \sum\left(\frac{xy}{z(x+y)} + 1\right)$

$= xyz \cdot \sum \frac{xy+yz+zx}{z(x+y)} = (xy+yz+zx) \cdot \sum \frac{xy}{x+y}$ ③

$1 = (x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$ $\therefore xy+yz+zx \le \frac{1}{3}$. ④

由均值不等式可得 $\sum \frac{xy}{x+y} \le \frac{1}{4}\sum(x+y) = \frac{1}{2}\sum x = \frac{1}{2}$ ⑤. 由④⑤可得③左 $\le \frac{1}{6}$

$\therefore k_{min} = \frac{1}{6}$.

1. $79 \mid a+77b \Rightarrow 79 \mid a-2b \Rightarrow 79 \mid 39a-78b \Rightarrow 79 \mid 39a+b$ $\quad\because (77,79)=1$

$77 \mid a+79b \Rightarrow 77 \mid a+2b \Rightarrow 77 \mid 39a+78b \Rightarrow 77 \mid 39a+b$

$\therefore 77\cdot 79 \mid 39a+b$ 设 $39a+b=77\cdot 79\cdot k$，$k\in\mathbb{Z}_+$

$\therefore 39(a+b)=77\cdot 79k+38b=(78^2-1)k+38b=(78^2-39)k+38(k+b)$.

$\therefore 39 \mid 38(k+b)$ $\because (38,39)=1$ $\therefore 39 \mid k+b$

$\therefore 39(a+b)=(78^2-39)k+38(k+b) \geq (78^2-39)\cdot 1+38\cdot 39$

等式成立时 $k=1$，$k+b=39$ 即 $b=38$

$\therefore a+b \geq 193$. 等式成立时 $a=155$，$b=38$ $\therefore (a+b)_{min}=193$

2. $\because p \mid n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ $\therefore$ 要么 $p \mid n-1$ 要么 $p \mid n^2+n+1$

若 $p \mid n-1$，由 $n \mid p-1$ 可知 $p-1 \geq n > n-1 \geq p$，矛盾

$\therefore p \mid n^2+n+1$ 设 $n^2+n+1=tp$ $(t\in\mathbb{Z}_+)$，$p-1=ln$，$l\in\mathbb{Z}_+$

则 $n^2+n+1=t(ln+1)$ ① $\therefore 1\equiv t \pmod{n}$ 设 $t=mn+1$（m为非负整数）

代入①得 $n^2+n+1=(mn+1)(ln+1)$ ②

若 $m\in\mathbb{Z}_+$ ②右 $\geq(n+1)(n+1)>$ ②左 矛盾 $\therefore m=0.\ t=1.$

$p=n^2+n+1$ $\therefore 4p-3=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$ 是完全平方数.

3. 若 $d=m-1$，则对任意 $k\in\{m.\ m+1.\ \cdots n\}\in A$ 有 $k\nmid d$

又 $\because n>m(m-2)\geq m>m-1$ $\therefore d\mid n!$ ✓

下面证明 $d\leq m-1$ ①

若 $d=1$，则① ✓

若 $d\geq 2$ 设 $d=p_1p_2\cdots p_t$ 其中 $p_1.p_2\cdots p_t$ 为素数 由 $d\mid n!$ 可知

$p_i\leq n$ $(i=1,2\cdots t)$ 若存在某个 $p_i\in\{m.m+1\cdots n\}$

取 $k=p_i$ 则 $k\mid d$ 矛盾 $\therefore p_i\leq m-1$ $(i=1,2\cdots t)$ 继续

特别地 $p_1\leq m-1$，假设存在 $j\in\{1,2\cdots t-1\}$ 使得

$p_1p_2\cdots p_j\leq m-1$，$p_1p_2\cdots p_{j+1}\geq m$. 由于 $n\geq m(m-2)+1=(m-1)^2$

则 $p_1p_2\cdots p_j\cdot p_{j+1}\le(m-1)\cdot(m-1)\le n$.

若 $p_1p_2\cdots p_{j+1}\in\{m, m+1, \cdots, n\}$. 取 $k=p_1p_2\cdots p_{j+1}$. 则 $k|d$, 矛盾

$\therefore p_1p_2\cdots p_{j+1}\le m-1$, 矛盾. 因此 $p_1p_2\cdots p_t=d\le m-1$

$\therefore d_{max}=m-1$

4. 若 $N=p^2\cdot q$ 其中 p 为素数, $q\in Z_+$ 则取 $x=pq$, $y=p^2q-pq\in Z_+$

$\therefore x+y=N$. $N|xy=pq\cdot(p^2q-pq)=p^2q(pq-q)$

若 $N=p_1p_2\cdots p_t$ 其中 $p_1,p_2\cdots p_t$ 是互不相同的素数. 假设存在

正整数 x,y 使得 $x+y=N$. $N|xy$ 设 $xy=kN$, $k\in Z_+$

$\therefore x(N-x)=kN$ $\therefore N(x-k)=x^2$ ①. 对于每个 $i=1,2,\cdots,t$

都有 $p_i|N$, 由①可得 $p_i|x^2$ $\therefore p_i|x$ $\therefore p_1p_2\cdots p_t|x$ 即 $N|x$

$\therefore x\ge N$ $\therefore y\le 0$ 矛盾

5. 设 $n=401d$ $d\geq 2$ $d\in \mathbb{Z}$. $\therefore$ 2时 $d=\frac{n}{401}$. 存在 d_1, d_2 ($d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$

为 n 的正因数) 使得 $d=\frac{n}{401}=d_1-d_2$ ①

设 $n=d_1u=d_2v$. $u, v\in \mathbb{Z}_+$ 代入①可得 $\frac{n}{401}=\frac{n}{u}-\frac{n}{v}$

$\Rightarrow \frac{1}{401}=\frac{1}{u}-\frac{1}{v} \Rightarrow u<401$ 且 $uv=401(v-u)$ ②

由于 401 是素数，由②可得 $401 \mid uv \Rightarrow 401 \mid v$. 设 $v=401k$

$k\in \mathbb{Z}_+$ 代入② $u\cdot \cancel{401}k=\cancel{401}(401k-u)$

$\therefore u(k+1)=401k$ ③ 由于 $(k, k+1)=1$ 由③可得

$k+1 \mid 401k \Rightarrow k+1 \mid 401$ $\therefore k+1=401$ $\therefore k=400$

$\therefore v=400\times 401=160400$ $\therefore n\geq v=160400$

对于 $n=160400$ 设 n 的所有正因数构成的集合为 $A\cup B$

其中 $A=\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, 400\}$

$B=\{a\cdot 401 \mid a\in A\}$

(1) 对于 $d\in A$ 且 $d\neq 16, 80, 400$，则 $2d\in A$ ∴ $d=2d-d$ ✓

$d=16\in A$ 则 $16=20-4$ 其中 $20, 4\in A$

$d=80\in A$ 则 $80=100-20$ 其中 $100, 20\in A$

$d=400\in A$ 则 $400=401-1$ 其中 $401\in B$, $1\in A$

(2) 对于 $d\in B$ 设 $d=401d'$, $d'\in A\setminus\{400\}$ ∴由(1)可得

存在 $d_1, d_2\in A$ 使得 $d'=d_1-d_2$

85 ∴ $d=401d'=401d_1-401d_2$，其中 $401d_1$, $401d_2\in B$

∴ $n=160400$ 是好数 ∴ $n_{min}=160400$

6. $S_n=\dfrac{10^n}{n^3+n^2+n+1}=\dfrac{10^n}{(n+1)(n^2+1)}$ $n=1$时 $S_1=\dfrac{10}{2\cdot 2}\notin Z_+$ ×

$n\geq 2$时 ∵ $(n+1, n^2+1)=(n+1, 2)=1$或2

若n为偶数，则 $n+1$, n^2+1 均为大于1的奇数 ∴ $5|n+1$, n^2+1 矛盾

若n为大于1的奇数 若 $5\nmid n^2+1$，则 $n^2+1=2^l$ $(l\in Z_+)$

∵ $n^2+1\equiv 1+1\equiv 2 \pmod 4$ ∴ $l=1$ ∴ $n=1$，矛盾

∴ $5 \mid n^2+1$ 且 $2 \parallel n^2+1$ 设 $n^2+1=2\cdot 5^t$，$n+1=2^k$ $(k\ge 2)$

$t\in\mathbb{Z}_+$ $k\in\mathbb{Z}_+$

若 $k=2$，则 $n=3$ $S_3=25$

若 $k\ge 3$ 则 $(2^k-1)^2+1=2\cdot 5^t \Rightarrow 2^{2k}-2\cdot 2^k+2=2\cdot 5^t$

$\Rightarrow 5^t-1=2^{2k-1}-2^k=2^k(2^{k-1}-1)$ ①

∵ $5^t\equiv\begin{cases}1 & t\text{为偶数}\\ 5 & t\text{为奇数}\end{cases}\pmod 8$ ∴ $5^t-1\equiv\begin{cases}0 & t\text{为偶数}\\ 4 & t\text{为奇数}\end{cases}\pmod 8$

由于 $8\mid 2^k$ ∴ 由①知 t 为偶数 设 $t=2m$ $(m\in\mathbb{Z}_+)$

由①可得 $(5^m-1)(5^m+1)=2^k(2^{k-1}-1)$ ②

∵ $5^m+1\equiv 1+1\equiv 2 \pmod 4$ ∴ 设 $5^m-1=2^{k-1}\cdot a$，其中 a

为正奇数 代入②可得 $2^{k-1}a(2^{k-1}a+2)=2^k(2^{k-1}-1)$

$\Rightarrow a(2^{k-2}a+1)=2^{k-1}-1$ ③

若 $a\geq 3$ 则 ③左 $>2^{k-2}\cdot 2+1>$ ③右，矛盾 $\therefore a=1$

代入③可得 $2^{k-2}+1=2^{k-1}-1$ $2^{k-2}=2$ $\therefore k=3$

$\therefore n=2^3-1=7$. $S_7=25000$

e.7. 设 $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ 满足 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=n$，其中 $a,c,n\in\mathbb{Z}$，$b,d\in\mathbb{Z}_+$

且 $(a,b)=1$ $(c,d)=1$，则由 $a+\frac{bc}{d}=bn$ 可得 $\therefore d\mid bc\Rightarrow d\mid b$.

②故 $b\mid d$ $\therefore b=d$

设 $\frac{x^4-1}{y+1}=\frac{a}{b}$，$a\in\mathbb{Z}$，$b\in\mathbb{Z}_+$ $(a,b)=1$，$\frac{y^4-1}{x+1}=\frac{c}{d}$，$c\in\mathbb{Z}$，$d\in\mathbb{Z}_+$ $(c,d)=1$

则 $b=d$ $\therefore x+1\mid x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1)$，$y+1\mid y^4-1=(y^2+1)(y+1)(y-1)$

$\therefore \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{x^4-1}{x+1}\cdot\frac{y^4-1}{y+1}\in\mathbb{Z}$ $\therefore b=d=1$

∴ $\frac{x^4-1}{y+1}\cdot\frac{y^4-1}{x+1}\in\mathbb{Z}$ ∴ $x+1 \mid y^4-1$

∴ $x^4y^{44}-1 = x^4(y^{44}-1)+x^4-1$

$(y^4-1)(y^{4\cdot10}+y^{4\cdot9}+y^{4\cdot8}+\cdots+y^4+1)$

即 $y^4-1 \mid y^{44}-1$ ∴ $x+1 \mid y^{44}-1$ ∴ $x+1 \mid x^4y^{44}-1$

8. 若 $a=1$ 时，假设 $n\in\mathbb{Z}_+$ 时 $n^2<n(n+1)<(n+1)^2$ ∴ $n(n+1)$ 不是完全平方数

若 $a=2$ 时，假设 $n\in\mathbb{Z}_+$ 时 $n^2<n(n+2)<(n+1)^2$ ∴ $n(n+2)$ 不是完全平方数

若 $a=4$ 时，假设 $n\in\mathbb{Z}_+$ 时 $n^2<n(n+4)<(n+2)^2$.

若 $n(n+4)$ 是完全平方数，则 $n(n+4)=(n+1)^2 \Rightarrow 4n=2n+1$ 矛盾

∴ $n(n+4)$ 不是完全平方数

若 a 为2的幂 设 $a=2^b$, $b\geq 3$ 设 $a=8k$, $k\in\mathbb{Z}_+$ 取 $n=k$

则 $n(n+a)=n(n+8k)=k(k+8k)=(3k)^2$ 不合题意

若 a 不是 2 的幂，设 $a=(2l+1)\cdot k$，$l,k\in\mathbb{Z}_+$，$\therefore n=l^2 k$

则 $n(n+a)=n(n+(2l+1)k)=l^2k(l^2k+(2l+1)k)=(kl(l+1))^2$。

不合题意。×

9. 设 $S_p=p^2-4p+9$，$p=2$ 时 $S_2=9=3^2$ ✓

$p=3$ 时 $S_3=24$ ×

$p\geq 5$ 时 假设 $p^2-4p+9=n^2$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ $\because p-2,\ p,\ p+2$ 是相邻

$\therefore (p-2)p(p+2)=(n-3)(n+3)$ ①

而三个奇数 $\therefore$ 一定有一个是 3 的倍数，由① 可得 $3\mid(n-3)(n+3)$

则 $3\mid n$，设 $n=3k$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ 代入①可得

$(p-2)p(p+2)=9(k-1)(k+1)$ ②

由②可知 $p\mid 9(k-1)(k+1)\Rightarrow p\mid(k-1)(k+1)$ 要么 $p\mid k-1$ 要么 $p\mid k+1$

(1) 若 $p \mid k-1$ 设 $k-1=lp$, $l\in \mathbb{Z}_+$ 代入② 可得

$(p-2)\cdot p\cdot(p+2)=9\cdot lp(lp+2) \Rightarrow (p-2)(p+2)=9l(lp+2)$ ③

$\Rightarrow -4\equiv 18l \pmod p \Rightarrow 9l+2\equiv 0 \pmod p$

$\therefore 9l+2\geq p \Rightarrow 9l\geq p-2$ 由③ $\therefore p+2\geq lp+2\geq p+2$

于是 $l=1$. 且 $p=9l+2=9+2=11$. $S_{11}=36^2$

(2) 若 $p\mid k+1$ 设 $k+1=lp$, $l\in\mathbb{Z}_+$ 代入② 可得.

$(p-2)p\cdot(p+2)=9(lp-2)\cdot lp \Rightarrow (p-2)(p+2)=9l(lp-2)$ ④

$\Rightarrow -4\equiv -18l \pmod p \Rightarrow 9l-2\equiv 0 \pmod p$

$\therefore 9l-2\geq p \Rightarrow 9l\geq p+2$ 由④ 可得 $p-2\geq lp-2\geq p-2$

于是 $l=1$. $p=9l-2=9-2=7$. $S_7=18^2$