

(1) 若 $p \mid k-1$ 设 $k-1=lp, l \in \mathbb{Z}_+$ 由 (2) 可得

$$(p-2) \cdot p \cdot (p+2) = q \cdot lp \cdot (lp+2) \Rightarrow (p-2)(p+2) = q \cdot l \cdot (lp+2) \quad (3)$$

$$\Rightarrow -4 \equiv 18l \pmod{p} \Rightarrow ql+2 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\therefore ql+2 \geq p \Rightarrow ql \geq p-2 \quad (3), p+2 \geq lp+2 \geq p+2$$

$$\text{解得 } l=1, p=ql+2=q+2=11, S_{11}=36^2 \checkmark$$

(2) 若 $p \mid k+1$ 设 $k+1=lp, l \in \mathbb{Z}_+$ 由 (2) 可得

$$(p-2)p \cdot (p+2) = q \cdot (lp-2) \cdot lp \Rightarrow (p-2)(p+2) = q \cdot l \cdot (lp-2) \quad (4)$$

$$\Rightarrow -4 \equiv -18l \pmod{p} \Rightarrow ql-2 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\therefore ql-2 \geq p \Rightarrow ql \geq p+2 \quad (4) \text{ 可得 } p-2 \geq lp-2 \geq p-2$$

$$\text{解得 } l=1, p=ql-2=q-2=7, S_7=18^2 \checkmark$$

10. $\Leftarrow \checkmark$
 $\Rightarrow$ 设 $f_k(m) = f_2(m) \equiv q = au^2, a, u \in \mathbb{Z}_+, a$ 无平方因子

$\therefore m f_2(m)$ 为完全平方数 $\therefore m = au^2, u \in \mathbb{Z}_+$



夸克扫描王

极速扫描，就是高效



$\therefore n \nmid |n|$ 为完全平方数 $\therefore n = aW^2, W \in \mathbb{Z}_+$

$\therefore au^2$ 也大于 n 故 aw^2 在 $\frac{n}{a}$ 与 n 之间

$\therefore u > \sqrt{a}w$ 且 $u < \frac{n}{a}$. 从而 $u > \sqrt{a}w$ 且 $u < \frac{n}{a}$

由①②可知 $|\sqrt{a}w - \sqrt{a}u| < 1 \therefore |w - u| < \frac{1}{\sqrt{a}} \leq 1$

$\therefore w - u = 0$ 即 $w = u \therefore n = au^2 = aw^2 = n$

19

11 $n=1$ 时 对于任意正整数 x, y 及 $x=1, \in \mathbb{N}$ $\frac{x^2+y}{xy+1} = \frac{1+y}{y+1} = 1$

$n \geq 2$ 时 假设正整数 x, y 满足 $\frac{x^2+y}{xy+1} = n$, 则

$x^2 - ny \cdot x + y - n = 0$ ① $\therefore \Delta = (-ny)^2 - 4(y - n)$ 为完全平方数.

$\therefore (ny - 2)^2 < n^2y^2 - 4y + 4n = \Delta < (ny + 2)^2$

$-4ny + 4 < -4y + 4n \quad -4y + 4n < 4 + 4ny$

从而 $n^2y^2 - 4y + 4n = \Delta = (ny \pm 1)^2$, 且



$$-4y+4n=\pm 2ny+1 \text{ 矛盾}$$

$$\text{若 } n^2y^2-4y+4n=\Delta=(ny)^2 \therefore y=n \text{ 代入①}$$

$$\text{可得 } x^2-n^2x=0 \therefore x=n^2 \text{ 不合题意}$$

12. $\leftarrow$ 假设整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $a_1 a_2 \dots a_n = n$. ① $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$. ②

若 n 为奇数, 由①可知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均为奇数 $\therefore a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 为奇数

与②矛盾 $\therefore n$ 为偶数 若 $2 \parallel n$ 由①可知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中 $\frac{n}{2}$

个为偶数 $\therefore a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 为奇数, 与②矛盾 $\therefore 4 \mid n$.

$\Rightarrow$ 设 $n=4k, (k \in \mathbb{Z}_+)$

当 k 为奇数时.

选定非负整数 α, β 使得 $n=4k=2 \cdot (2k) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{\alpha} \cdot \underbrace{(-1)(-1) \cdot \dots \cdot (-1)}_{\beta}$

$$\text{若 } \beta \text{ 为奇数, ③ } 2+\alpha+\beta=4k \text{ ④ } 2-2k+\alpha-\beta=0$$

$$\text{③} + \text{④} \text{ 可得 } 4-2k+2\alpha=4k \quad \alpha=3k-2, \beta=k$$

$$\text{取 } a_1=a_2=\dots=a_k=-1, a_{k+1}=\dots=a_{4k-2}=1, a_{4k-1}=2, a_{4k}=-2k \quad \checkmark$$



夸克扫描王

极速扫描, 就是高效



当 k 为偶数时

给定非负整数 α, β . $1 = (-2)^k = (-2)^k \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{\alpha} \cdot \underbrace{(-1)(-1) \cdots (-1)}_{\beta}$

1. β 为偶数 α 任意. $-2 - 2k + \alpha - \beta = 0$ (5)

(3) + (5) $-2k + 2\alpha = 4k \therefore \alpha = 3k \therefore \beta = k - 2$ (偶数)

取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{3k} = 1$ $a_{3k+1} = \cdots = a_{4k-2} = (-1)$, $a_{4k-1} = -2$, $a_{4k} = -2k$.

13. 设 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为互不相等的正整数, 给定正整数 C

求证 $cb_1, cb_2, \dots, cb_n$ 能组成所有和等于 C 的 n 个正整数的组, 即对任意正整数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) $cb_i + cb_j \mid cb_1 \cdot cb_2 \cdots cb_n$

$\Leftrightarrow b_i + b_j \mid C^{n-1} b_1 b_2 \cdots b_n$. (1)

取 $C = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_i + b_j)$ 1. ① 3. 任意

设 $a_i = cb_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 1. $a_1, a_2, \dots, a_n$ 互不相等且 1 是倍数
对于任意正整数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) 1. 有 $a_i + a_j \mid a_1 a_2 \cdots a_n$



夸克扫描王

极速扫描, 就是高效



14 记 M 为 M_n .

$n=2$ 时, 取 $M_2 = \{1, 2\}$. $\text{e.g. } 2-1 \mid 2+1$ ✓

假设 $n=k \geq 2$ 时 $M_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ (其中 $\frac{a_i}{a_j} \neq \frac{a_j}{a_i}$ 且 $a_i - a_j \mid a_i + a_j$)
 即对于任意正整数 i, j ($1 \leq i < j \leq k$), 必有 $|a_i - a_j| \mid a_i + a_j$
 $\Leftrightarrow |a_i - a_j| \mid 2a_j \Leftrightarrow |a_i - a_j| \mid 2a_i$

$\Rightarrow |a_i - a_j| \mid 2a_1 a_2 a_3 \dots a_k$ 设 $b = a_1 a_2 \dots a_k$

□ 定义 $M_{k+1} = \{b, b+a_1, b+a_2, \dots, b+a_k\}$.
 对于任意正整数 i, j ($1 \leq i < j \leq k$), $\text{e.g. } |b+a_i - (b+a_j)| \mid b+a_i + b+a_j$

$\Leftrightarrow |a_i - a_j| \mid a_i + a_j + 2b$ ✓

对于任意正整数 i ($1 \leq i \leq k$), 则 $|b+a_i - b| \mid b+a_i + b$

$\Leftrightarrow a_i \mid a_i + 2b$ ✓



15 $n=0$ 时 $7^0+1=8=2 \times 2 \times 2$ ✓

假设 $n=k \geq 0$ 7^k+1 是 $2k+3$ 个素数的乘积,

$n=k+1$ 时 设 $x=7^k=7^{2m-1}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$)

$$7^{k+1}+1 = x^2+1 = (x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$$

由归纳假设知是 $2k+3$ 个素数的乘积,
 $\downarrow$
 是 $2(k+1)+3$ 个素数的乘积

只需证 $S = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ 为合数

$$S = \frac{x^7+1}{x+1} = \frac{(x+1)^7 - (7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x)}{(x+1)^7}$$

$$= (x+1)^6 - 7x \cdot \frac{x^6+3x^5+5x^4+5x^3+3x^2+7x}{x+1}$$

$$= (x+1)^6 - 7x(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 + 3x(x^2-x+1) + 5x^2)$$

$$= (x+1)^6 - 7x(x^4+2x^3+3x^2+2x+1) = (x+1)^6 - 7x(x^2+x+1)^2$$

89



$$= (x+1)^6 - 7^{2m} (x^2+x+1)^2 = ((x+1)^3 - 7^m (x^2+x+1)) \underbrace{((x+1)^3 + 7^m (x^2+x+1))}_{>1}$$

$$\because x \geq 7 \quad \sqrt{7x} = 7^m \quad \therefore (x+1)^3 - 7^m (x^2+x+1) = (x+1)^3 - \sqrt{7x} (x^2+x+1)$$

$$\geq (x+1)^3 - \sqrt{x \cdot x} (x^2+x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 + x^2 + x)$$

$$= 2x^2 + 2x + 1 > 1 \quad \therefore S \text{ 是合数}$$

16 下面证明 $2^n \mid am^2 + bm + c$, 其中 b 为奇数. a, c 中有一个为偶数

69 $n=1$ 时 若 c 为偶数, 取 $m=0$ 且 $2 \mid c$.

若 c 为奇数 且 a 为偶数, 取 $m=1$ 且 $2 \mid \underline{a+b+c}$

假设对任意正整数 n , 结论成立

若 c 为偶数, 取 $m=2m'$ 且 $2^{n+1} \mid am^2 + bm + c$

$$= a(2m')^2 + b2m' + c = 2 \left(\underbrace{2a \cdot m'}_{\text{偶数}} + \underbrace{\frac{bm'}{1}}_{\text{奇数}} + \underbrace{\frac{c}{2}}_{\text{整数}} \right)$$

若 $m' \in \mathbb{Z}$, 使得

$$2^n \mid 2am' + bm' + \frac{c}{2} \quad (\text{归纳假设})$$



若 c 为奇数, 则 a 为偶数. 取 $m = 2m' + 1$, 则

$$2^{n+1} \mid am^2 + bm + c = a(4m'^2 + 4m' + 1) + b(2m' + 1) + c$$

$$= 2 \left(\underbrace{2am'^2}_{\text{偶数}} + \underbrace{(2a+b)m'}_{\text{奇数}} + \underbrace{\frac{a+b+c}{2}}_{\text{整数}} \right)$$

由 1/2 内假设, 存在 $m' \in \mathbb{Z}$, 使得 $2^n \mid 2am'^2 + (2a+b)m' + \frac{a+b+c}{2}$

17. (1) 若 f 的值域无界.

对于任意固定的 $n \in \mathbb{Z}_+$ $\therefore n + f(m) \mid f(n) + n + f(m)$

$$\therefore n + f(m) \mid f(n) + n + f(m) - n(n + f(m)) = f(n) - n^2$$

当 $f(m) \rightarrow +\infty$ 时, 一定有 $f(n) - n^2 = 0$ 即 $f(n) = n^2$

(2) 若 f 的值域有界, $\therefore f$ 的值域中只有有限个正整数.

由抽屉原理, 存在常数 $s \in \mathbb{Z}_+$, 使得对于无穷多个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 都有 $f(n) = s$ ①.

设所有满足 ① 的 $n \in \mathbb{Z}_+$ 构成的集合为 M .



对于任意 $m, n \in M$. 且 $|n+s| \leq |s+ns| \dots \therefore |n+s| \leq |s+ns| - s(n+s) = s-s^2$
 当 $n \rightarrow +\infty$ 时 一定有 $s-s^2=0 \therefore s=1$

$\therefore$ 对于任意 $n \in M$. 均有 $f(n)=1$

对于任意 $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in M$ 且 $|f(n)|=1$

$$n+f(m) \mid 1+n f(m) \therefore n+f(m) \mid 1+n f(m) - f(m)(n+f(m)) = 1-f(m)^2$$

$\therefore$ 当 $n \rightarrow +\infty$ 时 一定有 $1-f(m)^2=0 \therefore f(m)=1$

$\therefore$ 对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 均有 $f(n)=1$

18. 由 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ 且 $\alpha > 0, \beta > 1$ 且对于任意 $i \in \mathbb{Z}_+$, $[i\alpha]$ 与 $[i\beta]$ 互质.

$[i\beta]$ 两两互质. 设 $A = \{[i\alpha] \mid i \in \mathbb{Z}_+\}$ $B = \{[i\beta] \mid i \in \mathbb{Z}_+\}$.

下面证明 $A \cup B = \mathbb{Z}_+$ $A \cap B = \emptyset$

假设 $A \cap B \neq \emptyset$. 则存在 $m \in A \cap B$. 则存在 $k, l \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$m = [k\alpha] = [l\beta] \quad \text{于是}$$



$$m \leq k\alpha < m+1 \Rightarrow \frac{m}{\alpha} < k < \frac{m+1}{\alpha} \quad (1)$$

α 为无理数 矛盾

$$m \leq l\beta < m+1 \Rightarrow \frac{m}{\beta} < l < \frac{m+1}{\beta} \quad (2)$$

β 为无理数 矛盾

①+② 可得 $m < k+l < m+1$ 矛盾

$$\therefore A \cap B = \emptyset$$

假设 $A \cup B \neq \mathbb{Z}_+$ 则存在 $m \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $m \notin A \cup B \therefore m \notin A$

$m \notin B$ 则存在 $k, l \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $[k-1]\alpha < m < [k]\alpha$ ($< k\alpha$)

$[l-1]\beta < m < [l]\beta$ (类似)

$$(k-1)\alpha < m < m+1 < k\alpha \Rightarrow k-1 < \frac{m}{\alpha} < \frac{m+1}{\alpha} < k \quad (3)$$

$$(l-1)\beta < m < m+1 < l\beta \Rightarrow l-1 < \frac{m}{\beta} < \frac{m+1}{\beta} < l \quad (4)$$

③+④ 可得

$$k+l-2 < m < m+1 < k+l \quad \text{矛盾} \therefore A \cup B = \mathbb{Z}_+$$

19. $\because 2^{2023} < 2^{2100} = 8^{700} < 10^{700}, \therefore f_1(2^{2023}) \leq (700 \times 9)^2$



夸克扫描王

极速扫描，就是高效



$$= 3969 \times 10^4 < 4 \times 10^7 \quad f_2(2^{2023}) \leq (3 + 7 \times 9)^2 = 4356 < 4900$$

$$f_3(2^{2023}) \leq (3 + 3 \times 9)^2 = 36^2 = 1296 \quad f_4(2^{2023}) \leq (8 + 2 \times 9)^2 = 30^2 = 900$$

$$\because 2023 = 6 \times 337 + 1 \quad \underline{2^6 \equiv 1 \pmod{9}}$$

$$\therefore 2^{2023} \equiv 2 \pmod{9} \quad \therefore f_1(2^{2023}) \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$f_2(2^{2023}) \equiv 4^2 \equiv 7 \pmod{9} \quad f_3(2^{2023}) \equiv 7^2 \equiv 4 \pmod{9}$$

$$f_4(2^{2023}) = 4^2 \text{ 或 } 13^2 \text{ 或 } 22^2 = 16 \text{ 或 } 169 \text{ 或 } 484$$

$$f_5(2^{2023}) = 7^2 \text{ 或 } 16^2 = 49 \text{ 或 } 256 \quad f_6(2^{2023}) = 13^2 = 169$$

$$= f_7(2^{2023}) = 16^2 = 256 \quad \dots \quad f_{2024}(2^{2023}) = 169$$

23. 设 $f(a, b, c) = [a, b] + [b, c] + [c, a]$. 原问题转化为求使
 $a, b, c \in \mathbb{Z}_9$ 求 $f(a, b, c)$ 的值域. 其中 $f(a, b, c) \geq 3$



夸克扫描王

极速扫描，就是高效



取 $a=k \in \mathbb{Z}_+$, $b=c=1$ 则 $f(k, 1, 1) = [k, 1] + [1, 1] + [1, k] = k + 1 + k = 2k + 1$.

对于任意正整数 t , 取 $a=2^t \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$), $b=c=2^t$

$$\text{则 } f(2^t k, 2^t, 2^t) = [2^t k, 2^t] + [2^t, 2^t] + [2^t, 2^t k] = 2^t(2k+1)$$

假设存在 a, b, c 使得 $f(a, b, c) = 2^k$ ($k \geq 2$) 且 k 为奇数

由于 a, b, c 中至多有 2 项为偶数 且 a, b, c 中至少有一项为偶数时

$$\text{则 } f\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2} f(a, b, c) = 2^{k-1}, \text{ 矛盾}$$

若 a, b, c 中至多有 1 项为偶数 不妨假设 a, b 为奇数, c 为偶数

$$\text{则 } [a, b] = 2\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right], [a, c] = 2\left[\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right], [b, c] = 2\left[\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right]$$

$$\therefore f\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2} f(a, b, c) = 2^{k-1}, \text{ 矛盾}$$



夸克扫描王

极速扫描, 就是高效

