

取 $a=k \in \mathbb{Z}_+$, $b=c=1$ 则 $f(k, 1, 1) = [k, 1] + [1, 1] + [1, k] = 1 + 1 + k = 2k + 1$

对任意正整数 t , 取 $a=2^t \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) $b=c=2^t$

$$\text{则 } f(2^t k, 2^t, 2^t) = [2^t k, 2^t] + [2^t, 2^t] + [2^t, 2^t k] = 2^t(2k+1)$$

假设存在 a, b, c 使得 $f(a, b, c) = 2^k$ ($k \geq 2$) 且 k 为奇数

由于 a, b, c 中必有 2 个为偶数 且 $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ 中至少有一个为奇数

$$\text{则 } f\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2} f(a, b, c) = 2^{k-1} \quad \text{矛盾}$$

若 a, b, c 中恰有一个为偶数, 不妨假设 a, b 为奇数, c 为偶数

$$\text{则 } [a, b] = 2\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right], [a, c] = 2\left[\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right], [b, c] = 2\left[\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right]$$

$$\therefore f\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2} f(a, b, c) = 2^{k-1} \quad \text{矛盾}$$

20 设 $m = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0$, 其中 $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$
且 $0 \leq a_0, a_1, \dots, a_n \leq k-1$ 则



夸克扫描王

极速扫描, 就是高效



$$m \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{(k-1)}$$

假设 m 能被 $(k-1)$ 整除, 即 $(k-1) \mid m$

即 $(k-1)^3 \mid x_3, \dots$ 即 $\forall i \geq 3, (k-1)^3 \mid x_i$

$$m = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0$$

对于 $k \geq 2$, 由 $m \equiv -2 \pmod{(k-1)}$ 得 $m \equiv -2 \pmod{(k-1)}$

下面证明 $n \geq 4$ 且 $a_3 \geq 2$ 时 $m \equiv -2 \pmod{(k-1)}$

不妨设 $n=3$, 且 $a_3 \geq 2$ 时

$$\begin{aligned} & a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 - (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)(k-1)^2 \\ &= a_3 (k^3 - (k-1)^2) + a_2 (k^2 - (k-1)^2) - a_1 ((k-1)^2 - k) - a_0 ((k-1)^2 - 1) \\ &\geq 2(k^3 - (k-1)^2) - (k-1)((k-1)^2 - k) - (k-1)((k-1)^2 - 1) \\ &= 5k^2 - 2k - 1 > 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ 假设 m 能被 $(k-1)$ 整除, 即 $(k-1) \mid m$, 则 $x_t = a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0$ 其中 $a_3 \leq 1, t \geq 2$

$$\therefore x_{t+1} = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)(k-1)^2 \leq (1 + k-1 + k-1 + k-1)(k-1)^2 < 4(k-1)^3$$



夸克扫描王

极速扫描, 就是高效



$$\therefore x_{t+1} = (k-1)^3 \text{ 或 } 2(k-1)^3 \text{ 或 } 3(k-1)^3.$$

$$(1) \text{ 若 } x_{t+1} = (k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = \underline{(k-3)}k^2 + \underline{2k} + \underline{(k-1)}$$

$$\therefore x_{t+2} = (k-3 + 2 + k-1)(k-1)^2 = 2(k-1)^3. \text{ 非 } \lambda(2)$$

$$(2) \text{ 若 } x_{t+1} = 2(k-1)^3 = 2k^3 - 6k^2 + 6k - 2 = k^3 + \underline{(k-6)}k^2 + \underline{5k} + \underline{(k-2)}$$

$$\therefore x_{t+2} = (1 + k - 6 + 5 + k - 2)(k-1)^2 = 2(k-1)^3, \dots$$

$$(3) \text{ 若 } x_{t+1} = 3(k-1)^3 = 3k^3 - 9k^2 + 9k - 3 = 2k^3 + \underline{(k-9)}k^2 + \underline{8k} + \underline{(k-3)}$$

$$\text{其中 } k \geq 9. \text{ 则 } x_{t+2} = (2 + k - 9 + 8 + k - 3)(k-1)^2 = 2(k-1)^3 \text{ 非 } \lambda(2)$$

$$\text{若 } k=6. \text{ 则 } x_{t+1} = 3 \cdot 5^3 = 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 3 = 142^3 (6)$$

$$\therefore x_{t+2} = (1 + 4 + 2 + 3) \times 5^2 = 2 \times 5^3 \text{ 非 } \lambda(2)$$

$$\text{若 } k=7. \text{ 则 } x_{t+1} = 3 \cdot 6^3 = 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 7 + 4 = 1614 (7)$$

$$\therefore x_{t+2} = (1 + 6 + 1 + 4) \cdot 6^2 = 2 \cdot 6^3, \text{ 非 } \lambda(2)$$

$$\text{若 } k=8. \text{ 则 } x_{t+1} = 3 \cdot 7^3 = 2 \times 8^3 + 5 = 2005 (8)$$

$$\therefore x_{t+2} = (2 + 0 + 0 + 5) \cdot 7^2 = 7^3. \text{ 非 } \lambda(1)$$



夸克扫描王

极速扫描，就是高效



2 下面证明 $n_{\min} = 2^{101} - 1 = \underbrace{11 \dots 1}_{101} (2)$

若 $n < 2^{101} - 1$, 则 n 在二进制下最多有 100 个 1.

设 $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_r}$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 为非负数

$0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_r, r \leq 100$

选定非负数 s , 则 $2^s \cdot n = 2^s (2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_r})$

$= 2^{a_1+s} + 2^{a_2+s} + \dots + 2^{a_{r-1}+s} + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{s-1}) 2^{a_r}$
 $= 2^{a_1+s} + 2^{a_2+s} + \dots + 2^{a_{r-1}+s} + 2^{a_r} + 2^{a_r} + 2^{a_r+1} + 2^{a_r+2} + \dots + 2^{a_r+s-1}$

令 $r+s=100$ 即 $s=100-r$ 为非负数

$\therefore 2^s \cdot n$ 是 2^{100} 的因子.

若 $n = 2^{101} - 1$, 下面证明 n 不能表示为 100 个 2 的幂之和. 只要记住结论: n 不能表示为



夸克扫描王

极速扫描, 就是高效



倍不能表示为不超过100个2的幂之和

假设结论不成立. $\exists$ 正整数 $c \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$cN = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_r} \text{ 其中 } r \leq 100$$

不妨假设 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 互不相同, 且 $a_1 < a_2 < \dots < a_r$

且 c 最小. (1) 若 $a_r \geq 101$

$$\exists \mid 2^{a_r} - 2^{a_r-101} = 2^{a_r-101}(2^{101}-1) = 2^{a_r-101} \cdot n \equiv 0 \pmod{n}$$

即 $2^{a_r} \equiv 2^{a_r-101} \pmod{n}$. 存在正整数 $c' < c$ 使得

$$c'N = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_{r-1}} + 2^{a_r-101} \quad \text{与 } c \text{ 矛盾}$$

(2) 若 $a_r \leq 100$ 则 $cN < 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{100} = 2^{101} - 1 = n$. 矛盾

$$22. \quad z(xz+1)^2 = (5z+2y)(2z+y) \quad \text{①}$$

假设 z 为偶数. 设 $z = 2z_1$. 代入①得

$$z_1(2xz_1+1)^2 = (5z_1+y)(4z_1+y) \quad \text{②}$$



设 $(y, z_1) = d$ $y = dy_0, z_1 = dz_0$ 且 $y_0, z_0 \in \mathbb{Z}_+$ $(y_0, z_0) = 1$

代入②得 $z_0(2xdz_0+1)^2 = d(5z_0+y_0)(4z_0+y_0)$ ③

$\therefore (5z_0+y_0, z_0) = (y_0, z_0) = 1, (4z_0+y_0, z_0) = (y_0, z_0) = 1$

$\therefore \text{由 } z_0 \mid d(5z_0+y_0)(4z_0+y_0) \therefore z_0 \mid d$

$\therefore (2xdz_0+1, d) = (1, d) = 1 \therefore \text{由 } z_0 \mid d \mid z_0(2xdz_0+1)^2$

79

$\therefore d \mid z_0 \therefore d = z_0$ 代入③得 $(2xz_0^2+1)^2 = (5z_0+y_0)(4z_0+y_0)$ ④

$\therefore (5z_0+y_0, 4z_0+y_0) = (z_0, 4z_0+y_0) = (z_0, y_0) = 1 \therefore 5z_0+y_0, 4z_0+y_0$ 均为

平方数 设 $5z_0+y_0 = m^2, 4z_0+y_0 = n^2, m, n \in \mathbb{Z}_+$ 求 z_0 的值

$z_0 = m^2 - n^2 \Rightarrow m > n$ 代入④得

$mn = 2xz_0^2 + 1 = 2x(m^2 - n^2)^2 = 2x(m-n)^2(m+n)^2 \geq 2(m+n)^2 + 1$

$\geq 8mn + 1 > mn$ 矛盾 $\therefore z_0$ 为奇数.



夸克扫描王

极速扫描，就是高效



设 $(y, z) = w$, $y = wy'$, $z = wz'$, 则 $y'z' \in \mathbb{Z}_+^*$ 且 $(y', z') = 1$, w, z' 均为奇数

由 ① 可得 $z'(xwz'+1)^2 = w(5z'+2y')(2z'+y')$ ⑤

$\therefore (5z'+2y', z') = (2y', z') = (y', z') = 1$, $(2z'+y', z') = (y', z') = 1$

$\therefore$ 由 ⑤ 得 $z' | w(5z'+2y')(2z'+y')$ $\therefore z' | w$

$\therefore (xwz'+1, w) = (1, w) = 1 \therefore$ 由 ⑤ 得 $w | z'(xwz'+1)^2$

$\therefore w | z' \therefore w = z' \therefore z = wz' = z'^2$ 为完全平方数.

24 对任意正整数 n , $n! + 2, (n+1)! + 3, \dots, (n+1)! + n + 1$ 均为素数

n 个合数

设 $i, i+1, \dots, i+999$ 中有 $S(i)$ 个素数 则 $i \in \mathbb{Z}_+$.

由于 $S(1) > 10$ $S(1001! + 2) = 0$

$i, i+1, \dots, i+999$

$i+1, \dots, i+999, i+1000$



夸克扫描王

极速扫描，就是高效



$$\begin{cases} S(i+1)=S(i) & \text{若 } i, i+1000 \text{ 同为素数或同为合数} \\ S(i+1)=S(i)-1 & \text{若 } i \text{ 为素数, } i+1000 \text{ 不是素数} \\ S(i+1)=S(i)+1 & \text{若 } i \text{ 不是素数, } i+1000 \text{ 是素数} \end{cases}$$

∴ 存在 $k \in \mathbb{Z}_+$ $1 < k < 1001i+2$, 使得 $S(k)=10$

25. $p_1=2, p_2=3, p_3=5, p_4=7, p_5=11$

1. $n=1$ 时 $S_1=2 < 2^2 < S_2=2+3=5, a_1=2^2 \checkmark$

$n=2$ 时 $S_2=5 < 3^2 < S_3=5+5=10, a_2=3^2 \checkmark$

$n=3$ 时 $S_3=10 < 4^2 < S_4=10+7=17, a_3=4^2 \checkmark$

$n=4$ 时 $S_4=17 < 5^2 < S_5=17+11=28, a_5=5^2 \checkmark$

当 $n \geq 5$ 时, 假设结论不成立, 则存在正整数 $n \geq 5$.

使得存在正整数 k 满足 $k^2 \leq S_n < S_{n+1} \leq (k+1)^2$

∴ $p_{n+1} = S_{n+1} - S_n \leq (k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \quad \therefore p_n \leq 2k-1 \Rightarrow k \geq \frac{p_n+1}{2}$



夸克扫描王

极速扫描, 就是高效



$$\therefore \sum_{i=1}^n p_i \geq k^2 \geq \left(\frac{p_n+1}{2}\right)^2 = (1+3+5+7+9+11+\dots+p_n) \quad \text{矛盾.}$$

$$p_1+p_2+\dots+p_n = 2+3+5+7+11+\dots+p_n$$

$$26 \quad (1) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}-1}\right) + \frac{1}{2^m} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}\right)}_{2^{m-1}} + 1 = m.$$

$$(2) \quad \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{p_i p_j} < 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{p_i p_j}$$

$$p_i^2 \cdot p_i \cdot p_i \leq 2^{200}$$

$$\therefore \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} < 20$$

$$< 2 \sum_{i=2}^{200} \frac{1}{i} \uparrow \quad (由(1))$$



夸克扫描王

极速扫描，就是高效



$$\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}\right)^4 < 4! \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} \frac{1}{p_i p_j p_k p_l} < 24 \cdot 400 < 10^4$$

$$p_i p_j p_k p_l < 2^{400}$$

$$\therefore \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} < 10$$

27 假设结论不成立. 即存在正整数 N . 当 $n > N$ 时

$$(p_{n+1} - p(n)) (p(n) - p(n-1)) \leq 0 \quad \because (n+1, n) = 1, (n, n-1) = 1$$

$$\therefore p(n+1) \neq p(n), p(n) \neq p(n-1) \therefore (p_{n+1} - p(n)) (p(n) - p(n-1)) < 0 \quad ①$$

$$\neq p(n+1) > p(n). \text{ 由 } ① \text{ 得 } p(n+2) < p(n+1)$$

$$\text{反复 } ① \text{ 得 } p(n+3) > p(n+2), p(n+4) < p(n+3), \dots$$

$$\text{即 } p(n) < p(n+1) > p(n+2) < p(n+3) > p(n+4) < \dots$$

$$\text{若 } p(n+1) < p(n), \text{ 则 } p(n+2) > p(n+1)$$

$$p(n) > p(n+1) < p(n+2) > p(n+3) < p(n+4) > \dots$$



夸克扫描王

极速扫描, 就是高效



∴ 存在正整数 k , 使得 $2^k > N+1$

则 $P(2^k)=2$ ∴ 对于大于 N 的偶数 n , $P(n)$ 均有“极大值”

对于大于 N 的奇数 n , $P(n)$ 均为“极大值”

存在正整数 l , 使得 $3^l > N+1$ 且 $P(3^l)=3$ 为极大值

∴ $P(3^l-1)=P(3^l+1)=2$

设 $3^l-1=2^a$, $3^l+1=2^b$, $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $a < b$

两式可得 $2^b-2^a=2$, $b=2$, $a=1$ ∴ $l=1$, 与题设矛盾

$3^l > N+1$ 的正整数 l 不存在

28. 若 $n=1$ ✓

若 $n \geq 2$, 设素数 $p|n$, 且 $p^\alpha || n$, 其中 $\alpha \in \mathbb{Z}_+$

不妨设 $a > b$, 设 $a-b=t \in \mathbb{Z}_+$

若 $p \nmid t$, 则 $n|a^n-b^n = \frac{a^n-b^n}{a-b} (a-b)$ ∴ $p^\alpha | \frac{a^n-b^n}{a-b} \cdot t \Rightarrow p^\alpha | \frac{a^n-b^n}{a-b}$



夸克扫描王

极速扫描, 就是高效



由所证可知 $n! \mid \frac{a^n - b^n}{a - b}$

$$(2) \text{ 若 } p \mid t \text{ 且 } n! \mid \frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{(brt)^n - b^n}{a - b} = \frac{\sum_{i=0}^n C_n^i b^{n-i} t^i}{t} = \sum_{i=1}^n C_n^i b^{n-i} t^{i-1}$$

$$\therefore C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n}{i} \cdot \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!} = \frac{n}{i} C_{n-1}^{i-1}$$

$$\therefore \frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} C_{n-1}^{i-1} b^{n-i} t^{i-1}$$

18 设 $p \parallel i$, 则 β 为偶数 $\therefore i \geq p\beta > \beta \therefore i-1 \geq \beta$

$$\therefore p^{i-1} \mid t^{i-1} \therefore p^\alpha \mid \frac{a^n - b^n}{a - b} \text{ 由所证可知 } p^\alpha \mid n! \mid \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

$$29 \text{ 设数 } p \text{ (素数)} p^\alpha \parallel n! \text{ (} n \in \mathbb{Z}_+ \text{)} \text{ 且 } \alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right]$$

$$\text{对于任意数 } p \text{ 只要 } \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{k^2}{p^i} \right] + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{j}{p^i} \right] \geq \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{j+k}{p^i} \right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\left[\frac{k^2}{p^i} \right] + \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{j}{p^i} \right] \right) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \left[\frac{j+k}{p^i} \right] \quad \text{①}$$

要证①成立, 只需



$$2\text{ 对每个正整数 } i \text{ 均有 } \left\lfloor \frac{k^2}{p_i} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{k-1} \left\lfloor \frac{j}{p_i} \right\rfloor \geq \sum_{j=0}^{k-1} \left\lfloor \frac{j+k}{p_i} \right\rfloor$$

2. 对任意正整数 q 均有

$$\left\lfloor \frac{k^2}{q} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{k-1} \left\lfloor \frac{j}{q} \right\rfloor \geq \sum_{j=1}^k \left\lfloor \frac{j+k}{q} \right\rfloor \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{k^2}{q} \right\rfloor + \sum_{j=0}^{k-1} \left\lfloor \frac{j}{q} \right\rfloor > \sum_{j=0}^{k-1} \left\lfloor \frac{j+k}{q} \right\rfloor - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{q} - \left\{ \frac{k^2}{q} \right\} + \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{j}{q} - \left\{ \frac{j}{q} \right\} \right) > \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{j+k}{q} - \left\{ \frac{j+k}{q} \right\} \right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \frac{j+k}{q} \right\} + 1 > \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \frac{j}{q} \right\} + \left\{ \frac{k^2}{q} \right\} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{q} + \frac{k^2}{q} \right)$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \frac{j+k}{q} \right\} \geq \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \frac{j}{q} \right\}, \quad 1 > \left\{ \frac{k^2}{q} \right\} \text{ 求和即得}$$

30. 将 S_{11} 一般化成为互素正整数 p, q . $n = px + qy$, x, y 为任意非负整数

塞尔维基猜想. 不能表示为 $\textcircled{1}$ 的最小值为 $pq - p - q$

若对任意 $n \geq m$, 均有 $\textcircled{1}$ 成立, 则 m 的最小值为 $pq - p - q + 1$



假设存在非负整数 x, y , 使得 $pq - p - q = px + qy$

$$x. \quad pq = p(x+1) + q(y+1) \quad (2)$$

$\therefore p | q(y+1) \therefore p | y+1$ 设 $y+1 = py_1$, 其中 $y_1 \in \mathbb{Z}_+$ 且 $y_1 > 0$

又 $\therefore q | p(x+1) \therefore q | x+1$ 设 $x+1 = qx_1$, 其中 $x_1 \in \mathbb{Z}_+$ 且 $x_1 > 0$

$$\text{则 } pq = p \cdot qx_1 + qpy_1 \Rightarrow x_1 + y_1 = 1 \text{ 矛盾}$$

$\therefore (p, q) = 1$ 是互素的. 假设存在非负整数 x, y , 使得

$$px + qy = 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x+kq \quad y-kp \quad k \in \mathbb{Z}$$

取 k , 使 $-p < y_0 = y - kp < 0$

$$\therefore x_0 = x + kp > 0$$

$$\therefore px_0 + qy_0 = 1$$

