

证明: 构造图 G , 以 A 中的数为顶点, 若 $a+b \in \{1^2, 2^2, \dots, n^2\}$ 则 a 与 b 连边.
 则边数 $|E| \geq n$.

考虑“角数”.

对一对点 (x, y) , $(x < y)$.

考虑角的两端点为 (x, y) 的角数的理论上限.

即 $a+x, a+y$ 都是平方数. $\therefore y-x$ 为 2 个平方数之差.

$$y-x = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), \quad a, b \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

这样的 (a, b) 对数 $\leq 2\sqrt{y-x}$.

由熟知结论: $\forall \alpha > 0 \exists c \in \mathbb{R}_+$ 使 $\tau(n) < c \cdot n^\alpha$. $\forall n \in \mathbb{N}_+$

$$\therefore \exists c, 2\sqrt{y-x} < 2c \cdot (y-x)^\alpha < 2c \cdot n^{2\alpha}.$$

$$\therefore \text{角数} < 2c n^{2\alpha} \cdot \binom{|A|}{2} < c n^{2\alpha} |A|^2.$$

$$\text{另一方面, 角数} = \sum_i \binom{d(v_i)}{2} = \frac{1}{2} \sum_i d^2(v_i) - \frac{1}{2} \sum_i d(v_i)$$

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} \frac{2|E|^2}{|A|} - |E| > \frac{n^2}{|A|}.$$

$$\therefore c \cdot n^{2\alpha} \cdot |A|^2 > \frac{n^2}{|A|} \Rightarrow |A| > c^{-\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}-2\alpha}.$$

取 $\alpha = 0.00001$ 则对 n 充分大必有 $|A| > n^{0.666}$. 得证.

四 (本题满 50 分).

证明: 设 $f(m) = \sum_{p|m} (p-1) \varphi(p|m)$. 则若 $m = n_1 n_2$ 时 $f(m) = f(n_1) + f(n_2)$.

$$\text{证明: } f(m) = \sum_{p|m} (p-1) \varphi(p|m) = \sum_{p|m} (p-1) (\varphi(p|m_1) + \varphi(p|m_2)) = f(m_1) + f(m_2)$$

接下来我们证明 $f(m) \leq m-1$. 对 m 用数学归纳法. $m=1$ 时 $f(1)=0 \leq 1-1$ 成立.

设 $m < n$. 若 m 为合数, 设 $m = n_1 n_2$. 则 $f(m) = f(n_1) + f(n_2) \leq n_1 + n_2 - 2 \leq m-1$.

若 m 为素数, 则 $f(m) = m-1$. 故有 $f(m) \leq m-1$.

下面我们证明 $f(d) \leq \Omega(2^{n+1})$: 设 $2^{n+1} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 2^{n+1} 的分解式.

$$\text{则 } d = (x_1+1) \cdots (x_k+1) \Rightarrow f(d) = f(x_1+1) + f(x_2+1) + \cdots + f(x_k+1) \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$$

即 $f(d) \leq \Omega(2^{n+1})$. 设 $2^{n+1} = q_1 q_2 \cdots q_s$. q_i 为素数, q_i 互不相同.

$$\text{则 } \Omega(2^{n+1}) = s. \quad q_i | 2^{n+1} \Rightarrow \delta_{q_i}(2) = 2^{n+1} \Rightarrow 2^{n+1} | q_i - 1$$

若 $q_i - 1 = 2^{n+1}$ 则 $q_i = 2^{n+1} + 1 \Rightarrow 2^{n+1} + 1 | 2^{n+1} + 1 \Rightarrow \frac{2^{n+1}}{n+1}$ 为奇数 $\Rightarrow n=1$

而 $n=1$ 时 $d=2$ RHS=1. LHS = $\frac{2^{n+1}}{n+1} = 1$. 等式成立.

$n \geq 2$ 时 $q_i - 1 > 2^{n+1} \Rightarrow q_i - 1 \geq 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} \Rightarrow q_i \geq 2^{n+2} + 1$.

若 F_n 为素数, 则 $d=2$ RHS=1. LHS ≥ 1 . 等式成立 (因为 $2^{n+1} = (1+1)^n \geq 1+n+1$).

若 F_n 为合数, 则 $s \geq 2$. $2^{n+1} \geq (2^{n+2} + 1)^s > 2^{(n+2)s} + 1 \Rightarrow 2^{n+1} > 2^{(n+2)s}$

$$\Rightarrow 2^n > (n+2)s \Rightarrow s < \frac{2^n}{n+2} < \frac{2^{n+1}}{n+2}$$

$$\therefore f(d) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \quad \text{得证!}$$