



培尖教育
PJ TOPEDU

培尖教育

培尖教育2024年数学联赛精品研讨班

(7月11日-7月15日)

培尖教育教研组

一、题目

1. 设 p 为素数, n 为正整数, 如果对任意不同于 n 的正整数 m , 均有 $\{\frac{p^n}{n^p}\} \neq \{\frac{p^m}{m^p}\}$, 那么称 n 为好数, 这里 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分. 证明: 存在无穷多个两两互素的合数均为好数.

2. 给定正整数 k , 求最小的正实数 λ , 满足条件: 对每个正整数 n , 均存在 k 个正整数 $x_1, x_2, \dots, x_k$, 使得 $n = x_1 x_2 \cdots x_k$, 其中 x_i 为素数或者 $x_i \leq n^\lambda, i = 1, 2, \dots, k$.

3. 设 a, b 均为正整数, c, d, e 均为整数且 $(b, c) = 1$, 证明: 存在无穷多正整数 x , 使得

$$d \cdot a^x - cx \equiv e \pmod{b}.$$

4. 设 m 为正整数, 证明: 存在素数 p , 使得方程

$$\varphi(n) = pm$$

没有正整数解.

5. 证明: 在任意连续的 20 个正整数中, 一定存在正整数 d , 使得对每个正整数 n , 均有

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} > \frac{5}{2}.$$

6. 设 α 为无理数, β 为实数, 那么存在无穷多整数 x, y , 满足

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{3}{x}.$$

7. 证明: 存在无穷多正整数 n , 使得 2^n 的十进制表示为

$$2^n = 2024 \dots \dots .$$

8. 设 α 为正无理数, 令 a_n 表示 $[\alpha n]$ 的个位数, 再令

$$\beta = 0.a_1 a_2 a_3 \dots \dots .$$

证明: β 为无理数.

9. 设 a 为正整数, 证明: 方程 $n! = a^b - a^c$ 只有有限组正整数解 (n, b, c) .

10. 求所有的三元正整数组 (p, x, y) , 使得 p 为奇素数且 $x^{p-1} + y$ 和 $x + y^{p-1}$ 都是 p 的幂.

11. 求所有的正整数 n , 满足条件: 存在正整数 a, b , 使得 $(a+n)(b+n) \mid a^2 + b^2$.

12. 设 p 为素数, 正整数 n 称为“好数”, 如果对任意不同于 n 的正整 m , 均有 $\{\frac{p^n}{n^p}\} \neq \{\frac{p^m}{m^p}\}$, 这里 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分. 证明: n 为好数当且仅当 $p \nmid n$ 且 p 模 n^p 的阶能被 p 整除.

13. 设 $n \geq 21$, 那么开区间 $(n, 2n)$ 中至少存在 5 个素数.

14. 设 a, n 均为正整数且 $a^n \equiv 1 \pmod{n}$, 那么

$$a+1, a^2+2, a^3+3, \dots, a^n+n$$

模 n 两两不同.

15. 设正整数数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 满足 $(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}, i \geq 1$. 证明: 对任意非负整数 n , 均有 $a_n \geq 2^n$.

16. 设 n 为正整数, A_n 是 $\sigma(n)$ 的所有不同素因子构成的集合, B_n 是 n 的所有不同素因子构成的集合. 证明: 对任意的正整数 k , 存在正整数 m , 使得

$$|A_m \setminus B_m| = k.$$

17. 设 a, b 均为大于 1 的正整数, c 也为整数, 证明: 存在无穷多正整数 k , 使得

$$\left[\frac{a^k}{k}\right] \equiv c \pmod{b}.$$

18. 设 a, b 均是正整数, 证明: 在区间 $\left[\frac{b^2}{a^2+ab}, \frac{b^2}{a^2+ab-1}\right)$ 上不存在正整数.

19. 设 p 为素数, n 为正整数, 且 $n < p < \frac{3}{2}n$, 证明:

$$p \mid \sum_{j=0}^n (-1)^j (C_n^j)^3.$$

20. 设正整数 $n \geq 3$, $a_1, \dots, a_n$ 是不同的正整数. 证明: 存在 $i \neq j$, 使得 $a_i + a_j$ 不整除 $3a_1, \dots, 3a_n$ 中的任何一项.

21. 设 p 为素数, 则存在正整数 n , 使得

$$1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + n^1 \equiv 2024 \pmod{p}.$$

22. 设 p 为大于 3 的奇素数, a 为整数且 $(a, p) = 1$, 求 $f(x) = x^3 - ax$, 其中 $x = 0, 1, \dots, p-1$, 模 p 不同余数的个数.

23. 证明: 存在无穷多正整数 a , 满足

$$a! + (a+2)! \mid (a+2[\sqrt{a}])!.$$

24. 给定正整数 n , 求所有大于 1 的正整数 a , 满足条件:

$$a^n \mid n(n+1)(n+2) \cdots (an-1).$$

25. (1) 证明: 存在无穷多合数 n , 使得 $C_n^n, C_{2n}^n, \dots, C_{n^2}^n$ 是模 n 的完全剩余系.

(2) 证明: 存在无穷多合数 n , 使得 $C_n^n, C_{2n}^n, \dots, C_{n^2}^n$ 不是模 n 的完全剩余系.

26. 设 $a_1, a_2, \dots$ 为全体正整数的一个排列, 证明: 存在无穷多个正整数 i , 使得 $(a_i, a_{i+1}) \leq \frac{3}{4}i$.

27. 证明: 存在由正奇数构成的无穷等差数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足条件: 里面的每一项 a_n 均不能写成 $p + 2^\alpha$ 的形式, 其中 p 为素数, α 为正整数.

28. 设 p 为素数, 数列 $\{u_n\}$ 定义为

$$\begin{cases} u_n = n, & 0 \leq n \leq p-1; \\ u_n = pu_{n+1-p} + u_{n-p}, & n \geq p. \end{cases}$$

证明: $v_p(u_n) = v_p(n)$.

29. 设 m 为正整数. 证明: 每个偶数 $2n$ 均可以表示为两个与 m 互素的整数之和.

30. 设 S 是由有限个不同正整数构成的非空集合, 满足条件: 对任意的 $s \in S$, 以及 s 的每个正因子 d , 存在唯一的 $t \in S$ (t 可以与 s 相同), 使得 $(s, t) = d$. 求 S 中元素个数的所有可能的值.

31. 能表示成 $x^2 + y^3$ 的数称为好数, 其中 x, y 均为正整数. 给定正整数 $n \geq 2$, 证明: 存在无穷多个正整数 m , 使得

$$m+1, m+2, \dots, m+n^2$$

中恰好有 $n+1$ 个好数.

32. 求所有的正整数 n , 满足条件: 存在素数 $p < q$, 正整数 m , 使得 $p|n^m + 1$, $q|n^m + 1$, 且 $(q-p)|m$.

33. 设 p 为奇素数, α 为正整数, 如果 $a_1, a_2, \dots, a_t$ 为模 p^α 的简化剩余系, 那么一定存在它的一个排列 $b_1, b_2, \dots, b_t$, 使得

$$b_1, b_1b_2, b_1b_2b_3, \dots, b_1b_2 \cdots b_t$$

仍然是模 p^α 的简化剩余系.

34. 设 N 是正整数, $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个小于 N 的互不相同的正整数, 记这 n 个数的最小公倍数为 M , 最大公约数为 m , 已知 $M|m^2$, 证明: $n^3 < 4N$.

35. 求所有的正整数 m , 满足条件: 存在正整数 n_0 , 对任意的正整数 $n \geq n_0$, 均有

$$f(n) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m$$

为平方数.

36. 求所有的函数 $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$, 满足: 对每个正整数对 (x, y) , 均有 (1) x 和 $f(x)$ 有相同数量的正因子; (2) 如果 $x \nmid y$ 且 $y \nmid x$, 那么 $(f(x), f(y)) > f((x, y))$.

37. 设 m 为正整数, 求最小的正整数 $f(m)$, 满足条件: 对任意的正整数 n , 均有

$$(n+1)(n+2) \cdots (n+m) \mid f(m) \cdot C_{2n}^n.$$

38. 设正整数 $k \geq 2$, S 为 $\{2, 3, \dots, n\}$ 的子集且满足 $|S| > \pi(n) + (k-2)\pi(\sqrt{n})$. 证明: S 中存在 k 个不同的正整数 $a_1, a_2, \dots, a_k$, 使得

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_k) > 1.$$



39. 设 k 是正整数, 证明: 存在仅依赖于 k 的正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时, C_n^k 至少有 k 个不同的素因子.
40. 设 m, n 均为大于 1 的正整数并且满足条件: 对任意的正整数 a , 若 $(a, n) = 1$, 则 $n \mid a^m - 1$. 证明: $n \leq 4m \cdot (2^m - 1)$. 并求出取等号时 m 与 n 的值.

二、联赛数论原题

- 1.(QLS, 2009) 证明: 对每对正整数 k, l , 有无穷多个 m , 使得 $((\binom{m}{k}), l) = 1$.
- 2.(QLS, 2010) 设 $f^{(0)}(x) = x$, $f^{(1)}(x) = f(x) = x[x]$, $f^{(l+1)}(x) = f(f^{(l)}(x))$, $l \geq 0$. 如果 $r = k + \frac{1}{2}$, $0 \neq k \in \mathbb{Z}$, 则一定存在 m , 使得 $f^{(m)}(r) \in \mathbb{Z}$.
- 3.(QLS, 2011) 设正整数 $n \geq 4$, 证明: 存在多项式 $f(x)$ 满足条件: (1) $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, a_i 均为正整数; (2) 对每个整数 m 以及任意 k 个整数 r_i , $1 \leq i \leq k$, $k \geq 2$, 均有 $f(m) \neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)$.
- 4.(QLS, 2011) 在一个 3×9 的方格中填上一些正整数. 如果有某个矩形中的所有正整数之和为 10 的倍数, 那么称这个矩形为“好矩形”; 如果有一个格子不在任何一个“好矩形”中, 则称为“坏格”. 求在这个 3×9 的方格中的一种填法, 使得“坏格”最多, 最多为多少?
- 5.(QLS, 2012) 给定 a 为大于 1 的正整数, 那么存在正整数 b , 使得 $b < 2a - 1$ 且 $2a \mid b(b+1)$ 的充分必要条件是 a 不是 2 的幂次.
- 6.(QLS, 2013) 给定正整数 u, v , 数列 $\{a_n\}$ 定义如下: $a_1 = u + v$, 对整数 $m \geq 1$, $a_{2m} = a_m + u$, $a_{2m+1} = a_m + v$. 记 $S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ ($m = 1, 2, \cdots$). 证明: 数列 $\{S_n\}$ 中存在无穷多项是完全平方数.
- 7.(QLS, 2013) 设 n, k 为大于 1 的整数, $n < 2^k$. 证明: 存在 $2k$ 个不被 n 整除的整数, 若将它们任意分成两组, 则总有一组有若干个数的和被 n 整除.
- 8.(QLS, 2014) 设整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2014}$ 模 2014 互不同余, 整数 $y_1, y_2, \cdots, y_{2014}$ 模 2014 也互不同余. 证明: 可将 $y_1, y_2, \cdots, y_{2014}$ 重新排列为 $z_1, z_2, \cdots, z_{2014}$, 使得

$$x_1 + z_1, x_2 + z_2, \cdots, x_{2014} + z_{2014}$$

模 4028 互不同余.

- 9.(QLS, 2015) 求具有下述性质的所有正整数 k : 对任意正整数 n , $2^{(k-1)n+1}$ 不整除 $\frac{(kn)!}{n!}$.
10. (QLS, 2016) 设 n, k 是正整数且 n 为奇数. 已知 $2n$ 的不超过 k 的正约数的个数为奇数. 证明: $2n$ 有一个约数 d , 满足 $k < d \leq 2k$.
- 11.(QLS, 2016) 设 p 与 $p+2$ 均是素数, $p > 3$. 数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + \lceil \frac{pa_{n-1}-1}{n} \rceil$, $n = 2, 3, 4, \cdots$. 这里 $\lceil x \rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数. 证明: 对 $n = 3, 4, \cdots, p-1$, 均有 $n \mid pa_{n-1} + 1$ 成立.
- 12.(QLS, 2017) 设 m, n 均是大于 1 的整数, $m \geq n$. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个不超过 m 的互不相同的正整数, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互素. 证明: 对任意实数 x , 均存在一个 i ($1 \leq i \leq n$), 使得 $\|a_i x\| \geq \frac{2}{m(m+1)} \|x\|$. 这里 $\|y\|$ 表示实数 y 到与它最近的整数的距离.

13.(QLS, 2017) 设数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 1$.

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n, & \text{若 } a_n \leq n; \\ a_n - n, & \text{若 } a_n > n. \end{cases}$$

求满足 $a_r < r \leq 3^{2017}$ 的正整数 r 的个数.

14.(QLS, 2018) 设 n, k, m 是正整数, 满足 $k \geq 2$, 且 $n \leq m < \frac{2k-1}{k}n$. 设 A 是 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的 n 元子集. 证明: 区间 $(0, \frac{n}{k-1})$ 中的每个整数均可以表示为 $a - a'$, 其中 $a, a' \in A$.

15.(QLS, 2018) 给定整数 $a \geq 2$. 证明: 对任意的正整数 n , 存在正整数 k , 使得连续 n 个数 $a^k + 1, a^k + 2, \dots, a^k + n$ 均是合数.

16.(QLS, 2018) 数列 $\{a_n\}$ 定义如下: a_1 是任意正整数, 对整数 $n \geq 1$, a_{n+1} 是与 $\sum_{i=1}^n a_i$ 互素, 且不等于 $a_1, \dots, a_n$ 的最小正整数. 证明: 每个正整数均在数列 $\{a_n\}$ 中出现.

17.(QLS, 2019) 求满足以下条件的所有正整数 n : (1) n 至少有 4 个正约数; (2) 若 $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ 是 n 的所有正约数, 则 $d_2 - d_1, d_3 - d_2, \dots, d_k - d_{k-1}$ 构成等比数列.

18. (QLS, 2019) 设 m 为整数, $|m| \geq 2$. 整数数列 $a_1, a_2, \dots$ 满足: a_1, a_2 不全为零, 且对任意正整数 n , 均有 $a_{n+2} = a_{n+1} - ma_n$. 证明: 若存在整数 $r, s (r > s \geq 2)$ 使得 $a_r = a_s = a_1$, 则 $r - s \geq |m|$.

19.(QLS, 2020) 设 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, n = 3, 4, \dots$. 证明: 对整数 $n \geq 5, a_n$ 必有一个模 4 余 1 的素因子.

20.(QLS, 2021) 设 $n \geq 4$, 如果 $n \mid 2^n - 2$, 那么 $\frac{2^n - 2}{n}$ 为合数.

21.(QLS, 2021) 设 a 为正整数, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a, a_{n+1} = a_n^2 + 20, n = 1, 2, 3, \dots$. (1) 证明: 存在一个非立方数的正整数 a , 使得数列 $\{a_n\}$ 中有一项为立方数; (2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 中至多有一项为立方数.

22.(QLS, 2021) 求正整数 a, b, n (其中 $n \geq 2$) 满足的充分必要条件, 使得存在一个从集合

$$S = \{a + bt \mid t = 0, 1, \dots, n-1\}$$

到自身的一一映射 $f: S \rightarrow S$, 满足: 对任意 $x \in S$, 均有 x 与 $f(x)$ 互素.

23.(QLSA, 2021) 将连续 k 个正整数从小至大依次写下构成一个正整数, 称为 k -连续数. 例如依次写下 99, 100, 101 后得到 99100101, 是一个 3-连续数. 证明: 对任意的正整数 N, k , 存在一个 k -连续数被 N 整除.

24.(QLS, 2021) 设 m, n 均为大于 1 的整数且 n 不是平方数. 如果 $m \mid n^2 + n + 1$, 那么

$$|m - n| > \sqrt{3n} - 2.$$

25.(QLS, 2022) 设整数 $n (n > 1)$ 恰有 k 个互不相同的素因子, 记 n 的所有正约数之和为 $\sigma(n)$. 证明: $\sigma(n) \mid (2n - k)!$.

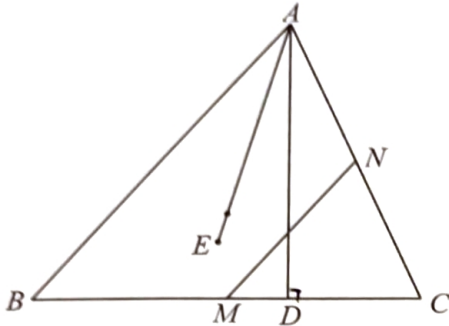


- 26.(QLS, 2022) 设正整数 a, b 都恰有 $m(m \geq 3)$ 个正约数, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 是 a 的所有正约数的一个排列. 问 $a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{m-1} + a_m$ 是否可能恰好是 b 的所有正约数的一个排列? 证明你的结论.
- 27.(QLS, 2022). 是否存在一个无限正整数集合 S , 具有下述性质: 对任意 $x, y, z, w \in S, x < y, z < w$. 若有序对 $(x, y) \neq (z, w)$, 则 $xy + 2022$ 与 $zw + 2022$ 互素?
- 28.(QLS, 2022). 设 k 是大于 2 的整数, 整数数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 满足 $a_0 = 0$, 且对任意非负整数 i , 均有 $a_{i+2} = ka_{i+1} - a_i$. 证明: 对任意正整数 m , 数 $(2m)!$ 整除 $a_1 a_2 a_3 \dots a_{3m}$.
- 29.(QLS, 2023). 正整数 n 称为“好数”, 如果对任意不同于 n 的正整 m , 均有 $\{\frac{2^n}{n}\} \neq \{\frac{2^m}{m}\}$, 这里 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分. 证明: 存在无穷多个两两互素的合数均为好数.

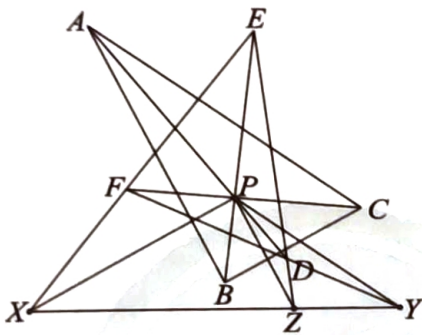


平面几何问题

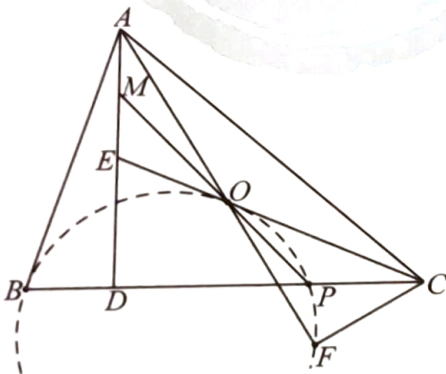
01. 设 AD 是锐角 $\triangle ABC$ 的高, M 、 N 分别是边 BC 、 CA 的中点, E 是点 D 关于直线 MN 的对称点. 求证: $\triangle ABC$ 的外心在直线 AE 上.



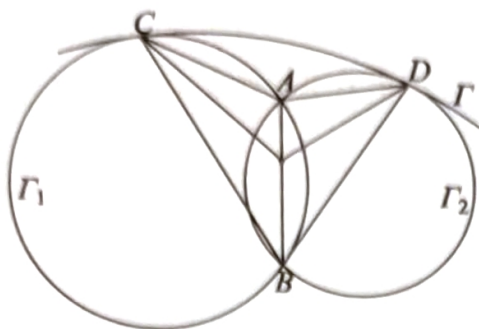
02. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, D 、 E 、 F 三点分别在直线 AP 、 BP 、 CP 上. 过点 P 作 BC 、 CA 、 AB 的平行线与直线 EF 、 FD 、 DE 分别交于点 X 、 Y 、 Z . 求证: X 、 Y 、 Z 三点共线.



03. 设 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心, AD 是 $\triangle ABC$ 的高 (D 在 BC 上), 直线 AD 与 CO 交于 E , M 是 AE 上一点, 过 C 作 AO 的垂线, 垂足为 F , 直线 OM 与 BC 交于 P . 求证: O 、 B 、 F 、 P 四点共圆的充分必要条件是 M 为 AE 的中点.



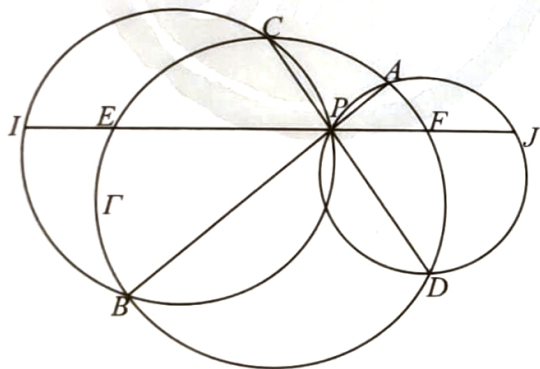
04. 设圆 Γ_1 与圆 Γ_2 交于 A, B 两点, 圆 Γ 分别与圆 Γ_1 、圆 Γ_2 内切于 C, D . 求证: $\angle BCA$ 的平分线与 $\angle ADB$ 的平分线交于直线 AB 上.



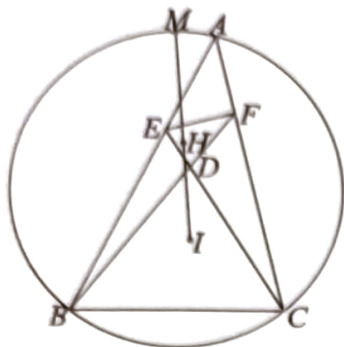
05. 设 M, N 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上两点, 且 $\angle BAM = \angle NAC$. $\triangle ABN$ 的外接圆与 $\triangle AMC$ 的外接圆交于 A, P 两点. 求证: $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.



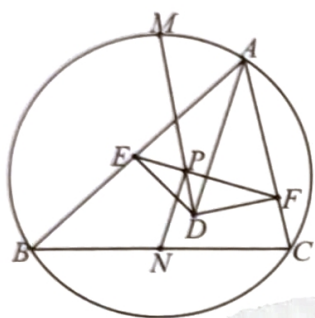
06. 圆 Γ 的弦 AB 与 CD 交于 P , 过 P 的一条直线与圆 Γ 交于 E, F 两点, 与圆 (PBC) 交于另一点 I , 与圆 (PAD) 交于另一点 J . 求证: $IE = JF$.



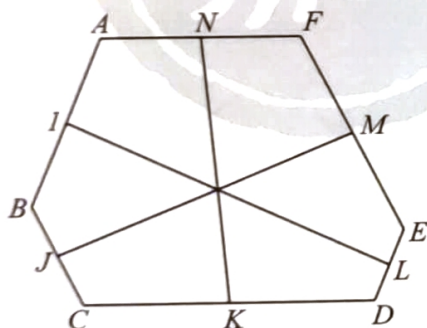
07. 设 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点, 且 $EB = BC = CF$, 直线 CE 与 BF 交于 D ; I 是 $\triangle ABC$ 的内心, H 是 $\triangle DEF$ 的垂心, M 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上 $\widehat{BAC}$ 的中点. 求证: I 、 H 、 M 三点共线.



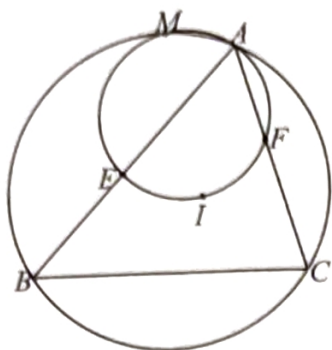
08. 设 M 、 N 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆上 $\widehat{BAC}$ 的中点与 BC 边的中点, 过 $\angle BAC$ 的角平分线上一点 D 作 AB 、 AC 的垂线, 垂足分别为 E 、 F , 过点 N 作 EF 的垂线, 垂足为 P . 求证: D 、 P 、 M 三点共线.



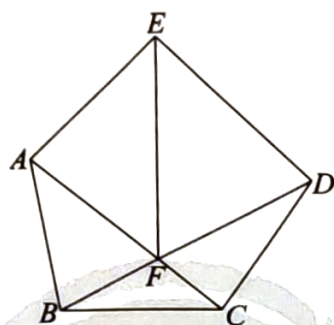
09. 设六边形 $ABCDEF$ 的三组对边分别平行, I 、 J 、 K 、 L 、 M 、 N 分别是边 AB 、 BC 、 CD 、 DE 、 EF 、 FA 的中点. 求证: IL 、 JM 、 KN 三线共点.



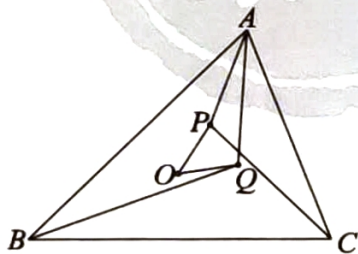
10. 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, M 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上 $\widehat{BAC}$ 的中点, 圆 (AMI) 与 AB 、 AC 的另一交点分别为 E 、 F . 求证: $BX = CY = \frac{1}{2} BC$.



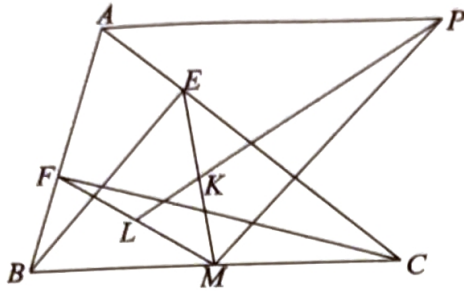
11. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, $AB = BC = CD$, $\angle BAE = \angle DCB$, $\angle EDC = \angle CBA$, AC 与 BD 交于 F . 求证: $EF \perp BC$.



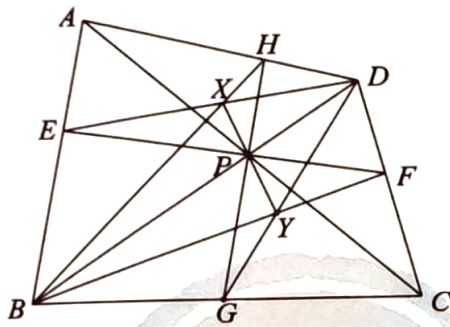
12. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, P 、 Q 是 $\triangle ABC$ 内两点, 且 $\angle ACP = \angle BAP = \angle QBA = \angle QAC$. 求证: $OP = OQ$.



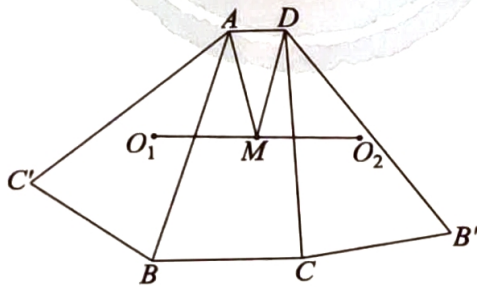
13. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle B > \angle C$, M 是 BC 的中点, BE 、 CF 是 $\triangle ABC$ 的两条高, K 、 L 分别为 ME 、 MF 的中点, 直线 KL 与过点 A 且平行于 BC 的直线交于 P . 求证: $PA = PM$.



14. 设四边形 $ABCD$ 的两对角线 AC 与 BD 交于 P , 过点 P 作两条直线, 一条直线与 AB 、 CD 分别交于点 E 、 F , 另一条直线与 BC 、 AD 分别交于点 G 、 H , BH 与 DE 交于点 X , BF 与 DG 交于点 Y . 求证: X 、 P 、 Y 三点共线.

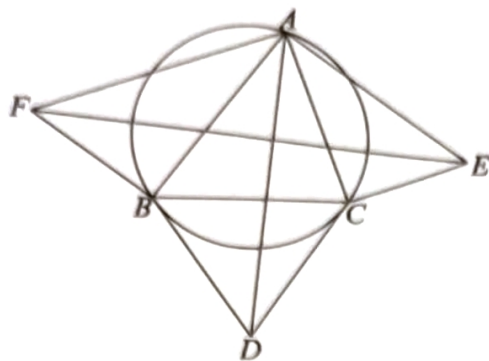


15. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 B 关于 CD 的对称点为 B' , 点 C 关于 AB 的对称点为 C' , O_1 、 O_2 分别是 $\triangle AC'B$ 的外心与 $\triangle DCB'$ 的外心, M 是 O_1O_2 的中点. 求证: $MA = MD$.

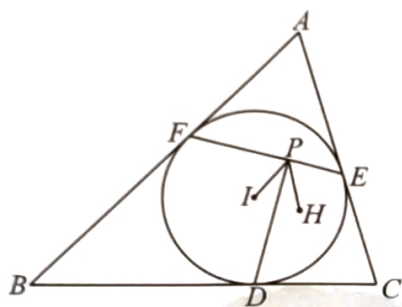




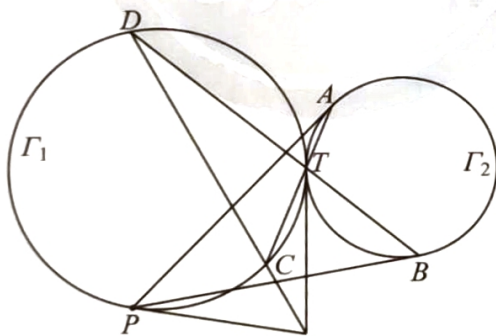
16. 设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆在 B 、 C 两点的切线交于 D , 过点 A 且垂直于 AB 的直线与过点 C 且垂直于 AC 的直线交于 E , 过点 A 且垂直于 AC 的直线与过点 B 且垂直于 AB 的直线交于 F . 求证: $AD \perp EF$.



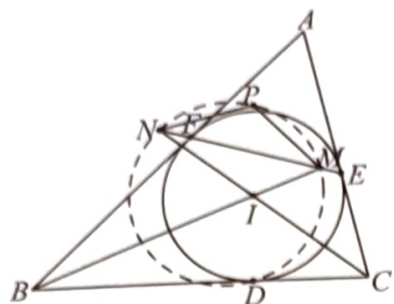
17. 设锐角 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC 、 CA 、 AB 分别切于 D 、 E 、 F , P 是 D 在 EF 上的射影, I 、 H 分别是 $\triangle ABC$ 的内心和垂心. 求证: PD 平分 $\angle IPH$.



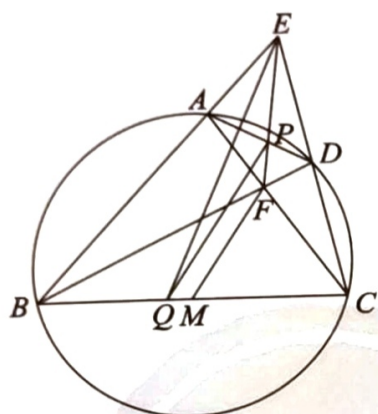
18. 设圆 Γ_1 与 Γ_2 圆外切于 T , P 是圆 Γ_1 上一点(不在圆 Γ_1 与圆 Γ_2 的连心线上), A 、 B 两点在圆 Γ_2 上, 且 PA 、 PB 为圆 Γ_2 的两条切线, 直线 AT 、 BT 与圆 Γ_1 的另一交点分别为 C 、 D . 求证: 直线 CD 、圆 Γ_1 在 P 点的切线、圆 Γ_1 与圆 Γ_2 在 T 点的公切线, 三线共点.



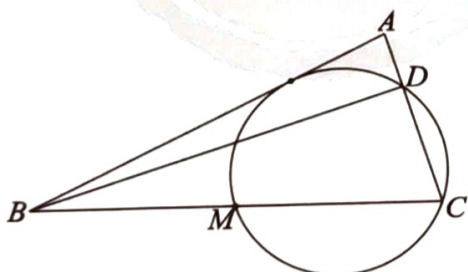
19. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与 BC 、 CA 、 AB 分别切于 D 、 E 、 F , I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 直线 BI 、 CI 与直线 EF 分别交于 M 、 N , 过点 M 且垂直于 AB 的直线与过点 N 且垂直于 AC 的直线交于 P . 求证: D 、 M 、 P 、 N 四点共圆.



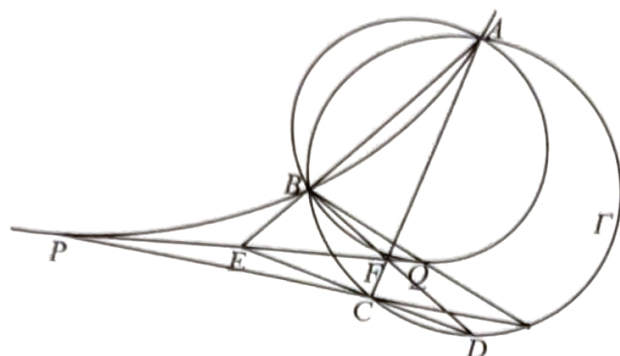
20. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, 直线 AB 与 CD 交于 E , 对角线 AC 与 BD 交于 F , EF 与 AD 交于 P , M 是 BC 的中点, Q 是 BC 上一点, 且 $\angle BEQ = \angle FEC$. 求证: $PQ \parallel FM$.



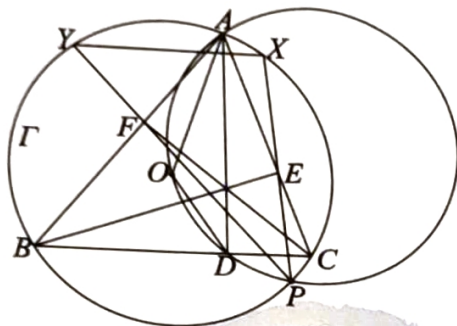
21. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB + AC = \sqrt{2}BC$, M 是 BC 的中点, 点 D 在 AC 上, 且 $BD \perp AC$. 求证: 圆 (MCD) 与 AB 相切.



22. 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 Γ , 直线 AB 与 CD 交于 E , 对角线 AC 与 BD 交于 F . 过 A, B 两点的两个圆与直线 EF 分别相切于 P, Q . 其中点 E 在点 P, F 之间. 求证: 直线 PC 与 QB 相交于圆 Γ 上.



23. 设 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心, AD, BE, CF 为其三条高, $\triangle ABC$ 的外接圆 Γ 与 $\triangle AOD$ 的外接圆交于 A, P 两点, 直线 PE, PF 与圆 Γ 的另一交点分别为 X, Y . 求证: $XY \parallel BC$.



24. 设 D 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点, O_1, H_1 分别是 $\triangle ABD$ 的外心和垂心, O_2, H_2 分别是 $\triangle ACD$ 的外心和垂心. 求证: $O_1H_1 \parallel AC$ 的充分必要条件是 $O_2H_2 \parallel AB$.

