



培尖教育
PJ TOPEDU

培尖教育

2024年数学联赛精品研讨讲义

(7月16日-7月21日)

培尖教育教研组



培尖 代数

7.16-7.18

数列

1. 对于正整数 $m \geq 3$, 令 $S(m) = 1 + \sum_{t=3}^m \frac{1}{t}$. 设整数 $n \geq 3, k \geq 3$. 比较 $S(nk)$ 与 $S(n) + S(k)$ 的大小.
2. 给定正整数 $n \geq 2$. 正数数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足: $a_k \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}, k = 2, 3, \dots, n$. 求 $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n}$ 的最大值, 并求取得最大值的条件.
3. 已知数列 $\{a(n)\}_{n \geq 1}$ 定义如下: $a(1) = 1, a(2) = 1$, 当 $n \geq 3$ 时, 有: $a(n) = a(a(n-1)) + a(n - a(n-1))$. 求证: 对任意 $n \geq 1$, 有: $a(2n) \leq 2a(n)$.
4. 设函数 $f: R^+ \rightarrow R^+$ 满足对所有的 $a, b \in R^+$, 均有:
(1) $f(ab) = f(a)f(b)$;
(2) $f(a+b) \leq 2\max\{f(a), f(b)\}$.
求证: 对于任意的 $a, b \in R^+$, 均有: $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = \lfloor \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \rfloor, n = 1, 2, \dots$. 求在数列 $\{a_n\}$ 中所有出现超过2次的数.
6. 两个整数数列 $a_1, a_2, \dots$ 和 $b_1, b_2, \dots$ 满足方程: $(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0$, 其中 $n = 3, 4, \dots$. 求证: 存在正整数 k 使 $a_k = a_{k+1000}$.
7. 求证: 对于所有的 $x \in [\frac{1}{111}, \frac{110}{111}]$, 存在 $a_i \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, \dots, 101$, 使得: $|x_{101} - x| \leq \frac{1}{402}$, 其中 $x_0 = 1, x_k = (x_{k-1} + 1)^{a_k}, k = 1, 2, \dots, 101$.
8. 求最小的正实数 λ , 使得只要实数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足: $a_0 > \lambda, a_{n+1} \geq a_n, b_{n+1} = a_n(b_n + b_{n+2})$, 就有: $\{b_n\}$ 为有界数列.

n 元不等式

1. 给定正整数 $n \geq 3$. 求最小的实数 k , 使得对于任意正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 设 $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 均有:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{s-a_i} + \frac{ka_n}{s-a_n} \geq \frac{n-1}{n-2}.$$

2. 给定正整数 $n \geq 2$. 定义集合 $T = \{(i, j) | 1 \leq i < j \leq n, i|j\}$, 对任意满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ 的非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 求 $\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j$ 的最大值.

3. 求最小的正整数 n , 使得存在 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 满足:

- (1) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0$;
- (2) $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 < 0$;
- (3) $a_1^5 + a_2^5 + \cdots + a_n^5 > 0$.

4. $a_i, b_i, c_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 求证:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i + c_i) \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i + c_i a_i + a_i b_i}{a_i + b_i + c_i} \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i c_i}{b_i c_i + c_i a_i + a_i b_i} \leq \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \sum_{i=1}^n c_i.$$

5. 给定正整数 n , 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个复数, $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 有复根 $z_1, z_2, \cdots, z_n$. 设 $\alpha = \frac{\sum_{j=1}^n z_j}{n}, \beta^2 = \frac{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}{n}$, 已知 $\beta^2 < 1 + |\alpha|^2$. 若复数 z_0 满足 $|\alpha - z_0|^2 < 1 - \beta^2 + |\alpha|^2$, 求证: $|P(z_0)| < 1$.

6. 给定正整数 n . 非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i+1} = \frac{n}{2}$,

求证: $\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{a_i^2+1}{2}} \geq 3 \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} - 2n$.

7. 给定正整数 n . 若对于每一个 i , 均有: $a_i \geq \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$, 则称实数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为一个凹数列. 求最大的实数 c , 使得对每一个各项均非负的凹数列, 均有:

$$\sum_{i=0}^n i a_i^2 \geq c \sum_{i=0}^n a_i^2.$$

8. 给定不小于 2 的正整数 n . 对所有满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 1$ 的非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$, 求 $(x_n^2 + x_{n-1}x_{n+1} + \cdots + x_1x_{2n-1})(x_{n+1}^2 + x_nx_{n+2} + \cdots + x_2x_{2n}) + (x_{n-1}^2x_{n+2} + x_{n-2}^2x_{n+3} + \cdots + x_1^2x_{2n}^2)$ 的最大值.

数列不等式

1. 设正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足: $a_1 < a_2 < \cdots < a_n, \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1$,

求证: 对任意实数 $x, (\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2+x^2})^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$.

2. 非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足: 对所有的实数 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 0$, 且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 1$ 均有: $\sum_{k=1}^n a_k x_k^3 < 1$. 求 $na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n$ 的最大可能值.

3. 求最大的实数 a , 使得对于所有正整数 n 和所有实数 $x_0, x_1, \cdots, x_n (0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$, 均有: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \geq a \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{x_i}$.

4. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 是 $1, 2, \cdots, 2n$ 的一个排列, 且 $i = 1, 2, \cdots, 2n-1$ 时 $|a_{i+1} - a_i|$ 互不相同. 求证: $a_1 - a_{2n} = n$ 当且仅当 $1 \leq a_{2k} \leq n$ 对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 成立.

5. 求所有的正实数数列 $\{a_k\}$, 满足: $a_k^2 = 1 + ka_{k+1}$ 且有无穷多个 $k \in \mathbb{N}^*$ 使得: $k \in \mathbb{N}^*, a_k < e^{\frac{2}{k}}$.

6. n 为正整数, 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in [1, +\infty)$, $A = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$. 定义 $x_0 = 1, x_k = \frac{1}{1+a_k x_{k-1}}, 1 \leq k \leq n$. 求证: $x_1 + x_2 + \dots + x_n > \frac{n^2 A}{n^2 + A^2}$.

7. 设 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为 n 个正实数, 且方程组 $x_{k-1} - (2-b_k)x_k + x_{k+1} = 0, k = 1, 2, \dots, n$. 有一组不全为零的实数解 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 其中 $x_0 = x_{n+1} = 0$. 求证: $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq \frac{4}{n+1}$.

8. 设 $c > 2$, 非负实数列 $a(1), a(2), \dots$ 满足:

(1) 对于任意的正整数 $m, n, a(m+n) \leq 2a(m) + 2a(n)$;

(2) 对于任意的非负整数 $k, a(2^k) \leq \frac{1}{(k+1)^c}$.

求证: 数列 $\{a(n)\}$ 有界.

三元四元不等式

1. 已知正实数 x, y, z 满足: $x + y + z = xy + xz + yz$, 求 $\sum \frac{1}{x^2+y+1}$ 的最大值.

2. 已知 $a \geq b \geq c \geq 0$, 且 $a + b + c = 3$. 求 $ab^2 + bc^2 + ca^2$ 的最大值.

3. 已知 $a, b, c \geq 0$, 且 $a + b + c = 3, k$ 为非负实数.

(1) 若 $k \leq 1$, 求 $ab^k + bc^k + ca^k$ 的最大值.

(2) 若 $k \geq 2$, 求 $ab^k + bc^k + ca^k$ 的最大值.

4. 已知正实数 a, b, c 满足: $a + b + c = abc$. 求证: $\sum \frac{a}{a^2+1} \leq \frac{\sqrt{abc}}{3\sqrt{2}} (\sum \frac{\sqrt{a^3+b^3}}{ab+1})$.

5. 已知 $a, b, c, d > 0$, 求证: $\sum \frac{c}{a+2b} + \sum \frac{a+2b}{c} \geq 8(\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+ad+bc+bd+cd} - 1)$.

6. 已知 a, b, c, d 为非负实数, 且 $a + b + c + d = 4$. 求 $\frac{a}{b^3+4} + \frac{b}{c^3+4} + \frac{c}{d^3+4} + \frac{d}{a^3+4}$ 的最小值.

7. 试确定最大的常数 $t \in \mathbb{R}$, 满足若 $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$, 且对于任意的 $1 \leq i < j < k \leq 4$, 均有: $a_i^2 + a_j^2 + a_k^2 \geq 2(a_i a_j + a_j a_k + a_k a_i)$,

则 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq t(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4)$.

8. 设 a, b, c 是一个三角形的三边长. 求证: $\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3$.

代数杂题

1. 设 λ 为满足方程 $\lambda = \lambda^{\frac{2}{3}} + 1$ 的正实数. 求证: 存在正整数 M , 使得 $|M - \lambda^{300}| < 4^{-100}$.



2. 求如下方程的实数解 (x, y) : $\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$ 且 $\sqrt{x(1-2y)} + \sqrt{y(1-2x)} = \frac{4}{9}$.

3. (1) 是否存在一个由严格递增的正整数构成的具有 2022 项的等差数列, 使得它的各项的十进制数字和也构成严格递增的等差数列.

(2) 把 2022 项改成无穷多项后这样的等差数列是否存在.

4. 给定正整数 $n \geq 3$, 非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. 求证:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + a_i a_{i-1} + a_{i-1}^2} + \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + a_i a_{i+1} + a_{i+1}^2} \right\} \geq 2,$$

其中下标在模 n 的意义下.

5. 设 $\{a_n\}, \{b_n\} (n = 1, 2, \dots)$ 是两个整数序列, $a_1 = 1, b_1 = 0$, 且对于正整数 n , $a_{n+1} = 7a_n + 12b_n + 6, b_{n+1} = 4a_n + 7b_n + 3$. 求证: a_n^2 是两个连续立方数的差.

6. 已知实数 a, b, c 满足: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 求 $a^2bc + ab^2c + abc^2$ 的最大值和最小值.

7. 求证:

$$\sum_{i,j,k \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的一个排列}} \csc^{20} \frac{2^i \pi}{7} \csc^{23} \frac{2^j \pi}{7} \csc^{2023} \frac{2^k \pi}{7}$$

为有理数.

8. 设 n 为大于 1 的整数, α 为实数, $0 < \alpha < 2$, $a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ 均为正数. 对 $y > 0$, 设 $f(y) = (\sum_{a_i \leq y} c_i a_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{a_i > y} c_i a_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

求证: 若正数 x 满足 $x \geq f(y)$ (对某个 y), 则 $f(x) \leq 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} x$.

数论中的代数方法

1. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下: $a_1 = 1, a_{n+1} = d(a_n) + c, n = 1, 2, \dots$, 其中 c 是一个确定的正整数, $d(m)$ 表示 m 的正因数的个数. 求证: 存在正整数 k , 使得数列 $a_k, a_{k+1}, \dots$ 是周期数列.

2. 已知 $f(x)$ 为多项式, 且其系数均为正整数. 正整数数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n a_{n+1} + f(n)}, n = 1, 2, \dots$, 求证: f 为常数.

3. 设 c 是一个正整数. 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 按如下方式定义: $a_1 = c, a_{n+1} = a_n^2 + a_n + c^3, n = 1, 2, \dots$. 求 c 的一切可能值, 使得存在 $k \geq 1, m \geq 2$ 满足: $a_k^2 + c^3$ 是一个正整数的 m 次幂.

4. 求满足下列条件的正整数列 $a_0, a_1, \dots$, 满足: $a_0 \geq 2024$, 且对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$,

(1) $a_n | a_{n+2}$;

(2) $|S_{n+1} - (n+1)a_n| = 1$.

其中 $S_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_{n-1} - \cdots + (-1)^{n+1}a_0$.

5. 求所有的有序整数对 (p, q) , 使得四次方程 $x^4 + 2px^2 + qx + p^2 - 36 = 0$ 有四个整根(允许有重根).

6. 求所有的正整数对 (a, b) , 满足: $a|b^2, b|a^2, a+1|b^2+1$.

7. 设 a, b, c 为正整数, 且 $ab|c(c^2 - c + 1), c^2 + 1|a + b$. 求证: a, b 中有一个数等于 c , 另一个数等于 $c^2 - c + 1$.

8. 求所有有序正整数对 (a, b, c) , 使得: $a^b + b^c + c^a = a^c + b^a + c^b$.





组合题选

题 1. 设 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 都是 S 的子集, 且满足: (a) $|A_i| = 3 (i = 1, 2, \dots, 10)$; (b) $A_i \cap A_j \neq \emptyset (1 \leq i < j \leq 10)$; (c) S 中的每个元素都至少属于 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 之一, 至多属于 5 个子集. 求 n 的所有可能值.

题 2. 设正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足不等式 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{2}$. 每年, 乐观国政府会发布一份由 n 项经济指标组成的年报. 对 $i = 1, 2, \dots, n$, 第 i 项指标的可能取值为 $1, 2, \dots, a_i$. 一份年报被称为乐观的, 如果它有不少于 $n - 1$ 项指标都高于先前的年报. 证明: 该政府可以发布无穷多份乐观的年报.

题3. 设 U 是平面上的任意一个有限点集,且 U 中包含 $k(k \geq 3)$ 个不共线的点.求 $|U - U|$ 的最小值.注 $U - U = \{\overrightarrow{AB} \mid A, B \in U\}$.

题4. 求正整数 n 的最大值,使得对任一以 $V_1, V_2, \dots, V_n$ 为顶点的 n 阶简单图,总存在集合 $\{1, 2, \dots, 2014\}$ 的 n 个子集 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足: $A_i \cap A_j \neq \emptyset (i \neq j)$ 当且仅当 V_i 与 V_j 相邻.



题 5. 教师节 200 名教师互发短信问候, 每个人都恰给其他的教师之一发了 1 条短信. 现从中最多可选取 k 名代表参加一个表彰大会, 使得他们中任意一人未给其中的人发过短信. 试求 k 的最小值.

题 6. 已知 $r, m, n \in \mathbb{N}^*$ ($m > 1$), 集合 $M = \{1, 2, \dots, r\}$, 且 $A_1, A_2, \dots, A_{mn}$ 为 M 的 mn 个不同的 m 元子集. 证明: 存在集合 A, B 满足下列条件: (a) $A \cap B = \emptyset, A \cup B = M$; (b) 在 $A \cap A_i, B \cap A_i$ ($i = 1, 2, \dots, mn$) 这 $2mn$ 个集合中至多有 $n - 1$ 个为空集

题 7. 设 n 是给定的正奇数, M 是 n 个非零复数的集合, 对 M 的任何子集 A , 记 $S(A)$ 为 A 中各数的和, 其中, 规定 $S(\emptyset) = 0$. 若 A 是集合 M 的一个子集, 满足对集合 M 的任何子集 X , 都有 $|S(A)| \geq |S(X)|$, 则称 A 为集合 M 的一个最大子集. 求集合 M 的最大子集个数的最大值.

题 8. 已知 $n \in \mathbb{N}^*$, 集合 $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$. 若存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 A_n 的全体子集的一个排列 $P_1, P_2, \dots, P_{2^n}$ 满足 $|P_i \Delta P_{i+1}| = k$ ($i = 1, 2, \dots, 2^n$), 则称 A_n 的子集可 k -循环排列. 这里 $P_{2^n+1} = P_1, A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, 其中 $X \setminus Y = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$. 求所有的正整数 k , 使得 A_n 的子集可 k -循环排列.



题 9. 设 r, k 都是固定的整数 ($r, k \geq 2$), X_r 是集合 X 的所有 r 元子集构成的集合, $F \subseteq X_r$ 且满足 F 中的任意 k 个元的交集非空. 记 $I(F) = \min\{\text{Card}(T) \mid T \subseteq X, T \cap A \neq \emptyset (A \in F)\}$.

证明: $I(F) \leq \frac{r-1}{k-1} + 1$.

题 10. 旅游团有 $2k$ 名旅客, 住入 k 间客房, 每个房间住两个人, 旅游团计划每天晚上每个房间中一个人出来开派对, 另一个人则在房间休息. 已知每一对不同房间的每对游客都同时参加了两次派对, 试求 k 的最大值.



题 11. 某羽毛球俱乐部的 $2n$ 名成员为 n 对夫妻. 俱乐部准备为所有成员安排一轮回避配偶的混合双打比赛. 规定配偶夫妻在赛程中既不作为搭档, 也不作为对立面出现. 要求: (a) 同性别的每两名成员恰作为对立面在一场混双比赛中相遇; (b) 任何两个不是配偶的异性成员恰作为搭档参加一场混双比赛, 也恰作为对立面在一场混双比赛中相遇. 设 $(n, 6) = 1$, 你能否安排一轮符合上述规定和要求的混合双打比赛?

题 12. 证明: 在一个 10×10 的正方形棋盘内, 任意 46 个互不相邻的 (即没有公共边) 的小方格中, 至少有 30 个小方格同色 (注: 棋盘小方格的颜色黑白相间).



题 13. 给定正整数 $m, n (m \geq n)$. 将 m 行 n 列的方格表中的若干个方格染色, 且每行每列至少有一个方格被染色. 选取若干个被染色的方格, 一种选取方式称为“好的”, 如果满足下列条件: (1) 至少选取一个方格; (2) 每行每列最多选取一个方格; (3) 对于每个被染色的方格, 如果它所在行有被选取的方格, 则它所在列也有被选取的方格. 证明: 无论怎样染色, 都存在一种好的选取方式.

题 14. 给定一个有限元非负实数集 U , U 的子集族 $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, \dots, S_l\}$ 及正整数 $k \leq l$. 在子集族 $\mathcal{C}$ 中取 k 个集合, 使得它们的并的元素和最大. 现有一个自然的“贪心”算法. 在第 $j (1 \leq j \leq k)$ 次取集族 $\mathcal{C}$ 中的 (未取过的) 一个集合 S_{i_j} , 使得当前已取的 $j-1$ 个集合的并的元素和最大. 证明: 上述贪心算法生成的并的元素和大于最优取法生成的并的元素和的 $1 - \frac{1}{e}$.



题 15. 设 $A_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 为实数数列. 对于每个非负整数 k , 由数列 $A_k = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 来构造一个新的数列 A_{k+1} 满足下列条件: (1) 选择 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个分割 $I \cup J$, 满足 $I \cap J = \emptyset, I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$, 表达式 $|\sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j|$ 取得最小值 (允许 I 或 J 为空集, 此时和为 0), 若有多于一个这样的分割, 任意选其中的一个; (2) 设数列 $A_{k+1} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 其中, 若 $i \in I$, 则 $y_i = x_i + 1$; 若 $i \in J$, 则 $y_i = x_i - 1$.

证明: 存在整数 k , 使得数列 A_k 中包含一项 x , 满足 $|x| \geq \frac{n}{2}$.

题 16. 在一个 $n \times n (n > 100)$ 的格表中将一些方格标记. 每行每列有 50 到 80 个格被标记. 证明: 可将 n 行染 2017 种颜色, 使得每列被标记的格所属的行的集合至少含有 33 种不同颜色.



题 17. 设正整数 $n \geq 2018$. 将 $n \times n$ 方格表中的每个格染为 n 种颜色之一, 满足每种颜色恰染 n 个格. 证明: 存在边平行于方格表且边长为 $\sqrt{n}$ 的正方形, 使得正方形可以覆盖四种不同颜色的格.

题 18. 已知平面内的点集 S 共有 2018 个点, 每两点距离不小于 1 个单位. 证明: 必存在集合 $M \subseteq S$, 满足 M 中至少有 288 个点, 且每两点距离至少为 $\sqrt{3}$ 个单位.



题 19. 已知 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为实数. 记

$$T_1 = \{(x_i, x_j) | 1 \leq i, j \leq n, |x_i - x_j| \leq 1\},$$
$$T_2 = \{(x_i, x_j) | 1 \leq i, j \leq n, |x_i - x_j| \leq 2\}.$$

证明: $|T_2| < 3|T_1|$.

题 20. 设数集 $S = \{m | m \in \mathbb{Z}_+, m \text{ 的素因子均小于 } 12\}$. 求最小的 n , 使得 S 的任意 n 元子集中总有四个数, 其乘积为完全平方数.





题 21. 已知正整数 $n \geq 5$, 在 $n \times n$ 的方格表中任选出若干个单位正方形满足以下条件, 方格表中每行每列都至少有两个单位正方形被选中, 并将所有被选中的单位正方形构成的集合称为“好集”. 若某好集有 m 个单位正方形, 且去掉其中的任意一个单位正方形将不再构成好集, 求 m 的最大值.

题 22. 给定整数 $n \geq 6$. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列. 求满足 $1 \leq i < j \leq n$ 且 $a_i a_j > ij$ 的数对 (i, j) 的个数的最大可能值.



题 23. 已知简单图 G 中有 1349 个点, 点之间有若干条边相连. 已知图中没有长度为 4 或以上的圈. 证明: 边集 E 的元素个数小于 2022.

题 24. 一副扑克牌去掉大、小王后剩余 52 张 (四种花色, 每种 13 张). 甲从中选取 26 张牌给乙, 剩下的留给自己. 接下来, 两人按照自己的选择依次把牌放在桌子上, 每人每次放一张且正面朝上. 甲先开始, 若乙能够接着放出一张花色相同或点数相同的牌, 则乙得 1 分. 试问: 乙最少能够保证自己得到多少分?





题 25. 设 X 为一个 2019 元集 $\mathcal{F}$ 为 X 上的非空子集族, 且 $\mathcal{F}$ 对于并、交、补运算是封闭的, 即对于任意的集合 $A, B \in \mathcal{F}, A \cup B, A \cap B, X - A, X - B$ 也均属于 $\mathcal{F}$. 令 k 表示 $\mathcal{F}$ 中的集合个数, 求 k 的所有可能取值.

题 26. 给定一个凸 $n (n \geq 4)$ 边形, 若联结一些不相交的对角线将其划分为若干个三角形, 则称为三角形划分. 证明: 对任意两种不同的三角形划分, 可通过四边形替换, 使得一种变成另一种.

注: 四边形替换是指将四边形一条对角线去掉而联结另一条.

题 27. 某大洲共有 2019 座城市, 由每座城市连出不少于 134 条道路 (每条道路连接两座城市), 从每座城市均可到达其他任何城市. 证明: 对于任意两座城市, 从其中一座城市到另一座城市至多只要途径 41 座城市.

题 28. 假设图 G 中任意两个长度为奇数的圈都至少有一个公共点, 并且任意 5 个顶点中至少有两个不相邻. 证明: 可以将 G 的顶点染成 4 种颜色, 使得任意两个相邻顶点得到的颜色不同.





题 29. 记 $S = \{1, 2, \dots, n\} (n \in \mathbb{Z}_+)$. 将 S 的 2^n 个子集染成红色或蓝色 (这里是将一个子集整体指定为一个颜色, 而不是对其中的元素分别染色), 对于任意一个子集 $T \subseteq S$, 将 T 的子集中染成蓝色的子集的个数记为 $f(T)$. 求满足如下染色方案的子集的个数: 对于 S 的任意子集 T_1, T_2 , 均有 $f(T_1)f(T_2) = f(T_1 \cup T_2)f(T_1 \cap T_2)$.

题 30. 求所有的实数 c , 使得存在一种将整数点 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ 标签为正整数的方式, 满足:

- (1) 只有有限给不同的标签;
- (2) 对于每一个标签 i , 标签为 i 的所有整点中, 任意两个整点的距离均不小于 c^i .

题 31. 设 S 是平面内的一个点集, S 有偶数个点, 且无三点共线. 证明: S 可以划分为两个子集, 使得它们的凸包具有相同数目的顶点.

题 32. 考虑一个 2023×2023 的方格表, 起初, 甲将每个小格染成红、蓝两色之一, 当且仅当两个格同色且至少有一个公共点时, 青蛙能从一个格跳到另一个格, 然后乙查看了染色情况, 且在方格表的格中放置了 k 只青蛙, 使得这 2023^2 个格中的任意一个都可以被某只青蛙在有限次跳跃(可能为 0)后到达. 求 k 的最小值, 使得对任意的染色方式, 均可以达到.



题 33. 确定所有正整数 n , 使得可在 $n \times n$ 方格表的每个小方格中填入字母 I, M, O 之一, 满足: (1) 在每一行及每一列中, 恰有三分之一的格填入字母 I , 三分之一的格填入字母 M , 三分之一的格填入字母 O ; (2) 在每条对角线上, 若该对角线上的格的个数为 3 的倍数, 则恰有三分之一的格填入字母 I , 三分之一的格填入字母 M , 三分之一的格填入字母 O .

题 34. 已知 n 为正整数. 求满足下述性质的最小的正整数 k : 在一个 $2n \times 2n$ 的方格表中将其中的 k 个格做上标记, 使得存在唯一的方式将 $2n \times 2n$ 的方格表分拆为 1×2 和 2×1 的多米诺, 且每一个多米诺均不包含两个被标记的格.

题 35. 设 M 为包含 2017 个正整数的集合. 对于每个非空的 $A \subseteq M$, 定义 $f(A) = \{x \in M \mid x \text{ 被集合 } A \text{ 中的奇数个元素整除}\}$. 求颜色数目的最小值, 使得可以对 M 的所有非空子集进行染色, 且满足当 $A \neq f(A)$ 时, 有集合 A 与 $f(A)$ 不同色.

题 36. 设 $n \in \mathbb{N}^*$, $S = \{1, 2, \dots, 2n\}$ 的 k 个子集 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 满足: (1) 对任意的 $i \neq j$ ($i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$), $A_i \cap A_j$ 恰有奇数个元素; (2) 对任意的 i ($i = 1, 2, \dots, k$), 都有 $i \notin A_i$; (3) 若 $i \in A_j$, 则 $j \in A_i$.

试确定 k 的最大值.

题 37. 给定一个 19×19 的方格棋盘, 其中有 n 个格子上各放置一枚棋子. 对每个棋子, 以其所在格为中心作一个 5×5 的边平行于相应棋盘边界的正方形, 这个正方形称为该棋子的范围. 已知每个棋子范围中恰有一个其他棋子, 求 n 的最大值.

题 38. 在一张无限大的方格表上的每个方格中填有一个实数. 已知任意一个由格线构成的正方形中的数之和的绝对值不超过 1. 证明: 任意一个由格线构成的矩形中的数之和的绝对值不超过 4.



题 39. 求一切正整数 $n (n \geq 3)$, 满足: 可以将一个平面正 n 边形分割成有限个三角形, 使得在这些三角形中, 任意两个重叠部分的面积为零, 并且任意两个都没有公共边 (允许某些三角形的边有公共部分).

题 40. 对两个不全等的矩形 A, B , 称 $A > B$, 若 A 的长不小于 B 的长, 且 A 的宽也不小于 B 的宽. 现在若对任意的 n 个两两不全等的, 长和宽均为不超过 2020 的正整数的矩形, 都必存在其中 3 个矩形 A, B, C , 使得 $A > B > C$, 求 n 的最小值.





题 41. 给定正整数 n , 在 $n \times n$ 方格表中的每个小方格内填入一个整数. 对这个方格表可进行如下操作: 选取一个小方格, 将这个小方格所在的行与列中的 $2n - 1$ 个小方格内的每个数各加 1.

求最大整数 $N = N(n)$, 使得无论初始时方格表中的数是多少, 总可以经过一系列上述操作, 使得方格表中至少有 N 个偶数.

题 42. 在平面上有 $n (n \geq 4)$ 个无三点共线的点. 从这 n 个点中选取四个点组成平行四边形, 记面积为 1 的平行四边形的个数为 $A(n)$. 证明: $A(n) \leq \frac{n^2 - 3n}{4}$.

题 43. 设 S 为平面上给定的有限整点集, A 为 S 的满足任两点的连线都不平行于坐标轴的元素个数最多的子集, B 为整数集的满足对任意 $(x, y) \in S$, 总有 $x \in B$ 或 $y \in B$ 的元素个数最少的子集. 证明: $|A| \geq |B|$.

题 44. 设 $Oxyz$ 是空间直角坐标系, S 是空间中的一个由有限个点所形成的集合, S_x, S_y, S_z 分别是 S 中所有的点在 Oyz 平面、 Ozx 平面、 Oxy 平面上的正交投影所成的集合. 证明

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|,$$

其中 $|A|$ 表示有限集合 A 中的元素数目. (说明: 所谓一个点在一个平面上的正交投影是指由点向平面所作垂线的垂足.)



题 45. 设正整数 m, n 满足 $m \geq n \geq 2022$. 证明: 对任意实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $|a_i + b_j - ij| \leq m$ 的有序数对 $(i, j) (1 \leq i, j \leq n)$ 的个数不超过 $3n\sqrt{mlnn}$.

