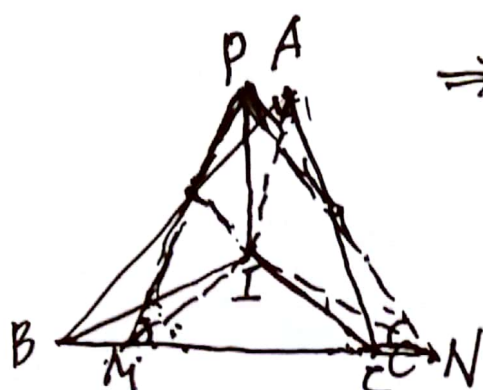
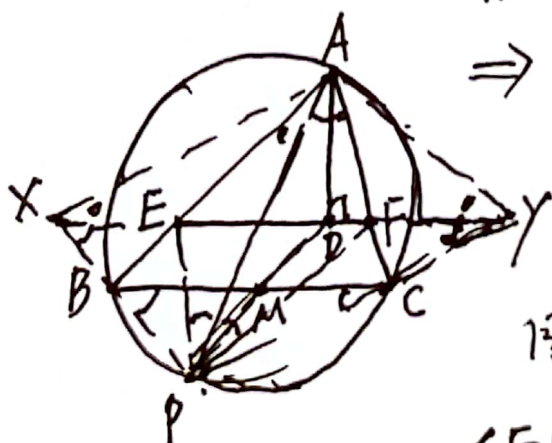


一. 繁瑣平面何証明方法
 $a=b \leq c, \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$



$\Rightarrow PI \perp BC.$



$AD \perp BC, EF \parallel BC$

$\Rightarrow \angle EPA = \angle APF.$

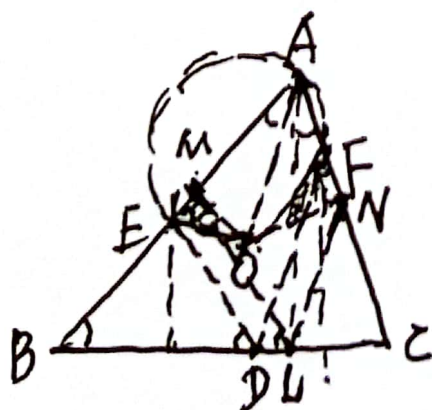
$\angle PAC = \angle PBC = \angle PXY$

$\Rightarrow$ ~~X, P, F, A 共圓.~~

同法. A, E, P, Y 共圓

$\angle FPA = \angle FXA = \angle AYE = \angle APE$

$AD \perp XY, D$ 为 XY 中点 $\Rightarrow AX = AY.$



$\Rightarrow A, E, O, F$ 共圓

$ED \parallel ML, FD \parallel NL.$

$\angle BAO = \angle LAC, \angle BAL = \angle OAC.$

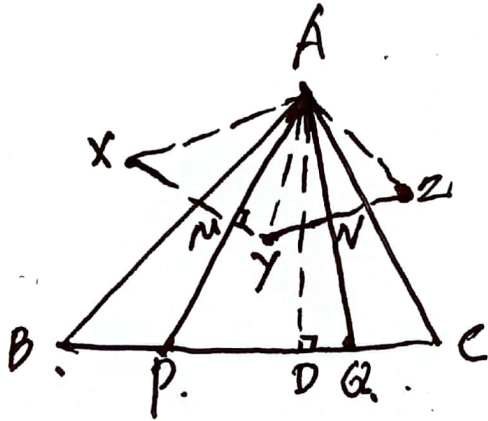
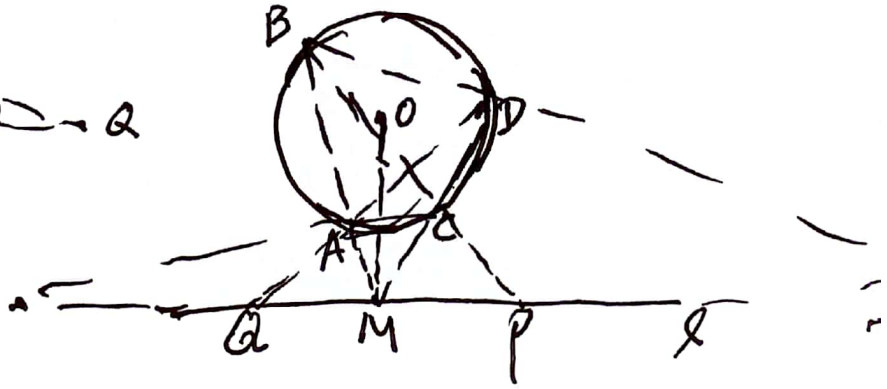
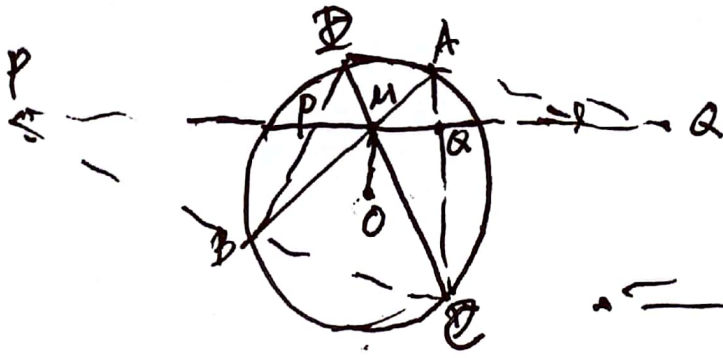
$\triangle ABL \sim \triangle AON, \triangle ALC \sim \triangle AMO.$

$\frac{OM}{MB} = \frac{LC}{AL}, \frac{ON}{NC} = \frac{LB}{AL}.$

$\frac{OM}{ME} = \frac{OM}{MB} \cdot \frac{MB}{ME} = \frac{LC}{AL} \cdot \frac{BL}{DL} = \frac{LC}{DL} \cdot \frac{LB}{AL} = \frac{NC}{NF} \cdot \frac{ON}{NC} = \frac{ON}{NF}$



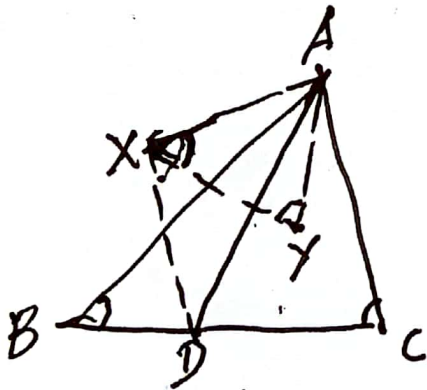
二. 注意所有结论之积累



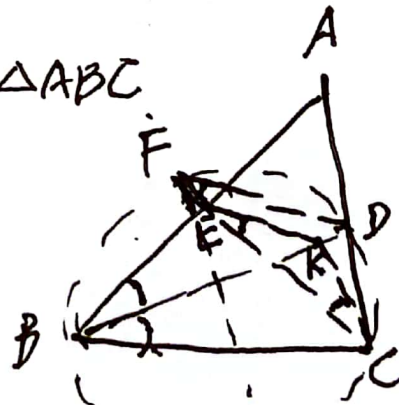
$$\underline{BP = QC} \Leftrightarrow \underline{\frac{AP}{XY} = \frac{AQ}{YZ}}$$

$$\triangle AXY \sim \triangle ABQ, \quad \triangle APC \sim \triangle AYZ$$

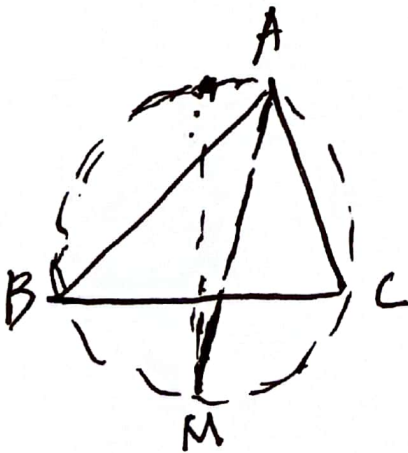
$$\underline{\frac{AM}{XY} = \frac{AD}{BQ} = \frac{AD}{PC} = \frac{AN}{YZ}}$$



$$\triangle AXY \sim \triangle ABC$$



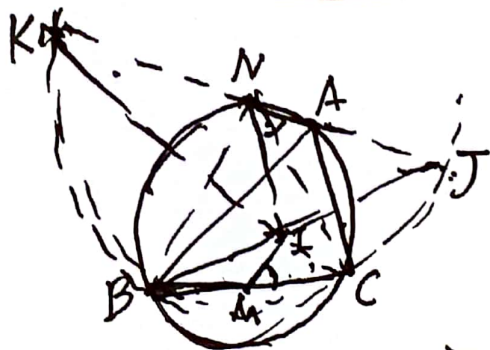
$$\underline{\Rightarrow KC = KE}$$



$$\underline{MJ = MI = MB = MC}$$

$$\underline{NI_C = NI_b = NB = NC}$$





$$AB > AC$$

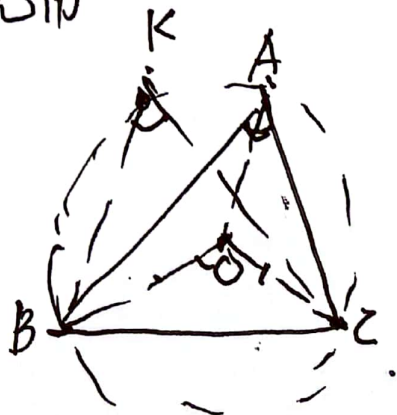
$$\Rightarrow \angle CMI = \angle INA$$

$$NJ = NK = NB = NC$$

$$\Rightarrow \triangle IBC \sim \triangle IKJ$$

M, N 为其相似对应点.

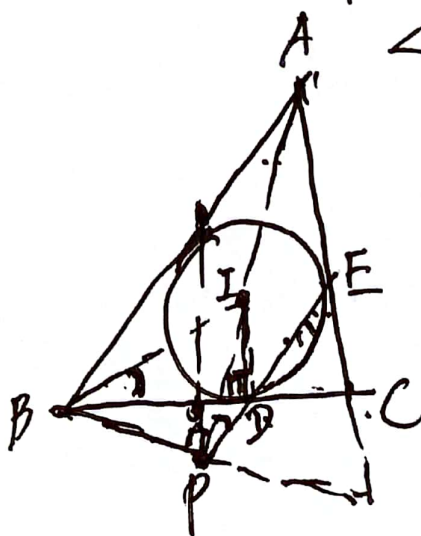
优角



$$O \perp \triangle ABC \Rightarrow \text{外心} \Leftrightarrow OB = OC \quad \text{且}$$

$$\angle BOC = 2\angle BAC$$

$$\Rightarrow PA \perp PB$$



$$\begin{aligned} \angle EPA &= \angle PEC - \frac{A}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = \frac{B}{2} \\ &= \angle DBI \end{aligned}$$

$$\Rightarrow PE \perp AB$$

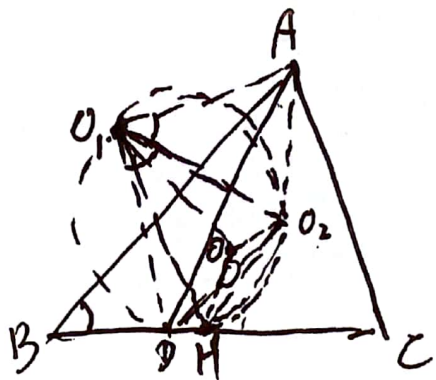
$$\begin{aligned} \angle CPD &= 180^\circ - 2\angle DCP \\ &= 2(90^\circ - \angle DAC) \\ &= 2\angle CEA \end{aligned}$$

$$= 2\angle CEA$$

$$\Rightarrow 360^\circ - \angle CPD = 2\angle DEC \Rightarrow PE = PD$$

$$\angle DEP = \angle ADA = \angle DBA$$





$$\triangle AO_1O_2 \sim \triangle ABC$$

$$\angle DO_1O_2 = \angle O_2O_1A = \angle B$$

$$\angle CHO_2 = \angle DO_1O_2 = \angle B \Rightarrow O_2H \parallel AB$$

$$\Rightarrow OO_1 \perp HO_2 \quad \text{同理} \quad OO_2 \perp HO_1$$

$$\Rightarrow H \text{ 是 } \triangle OO_1O_2 \text{ 之心}$$

$$OH \parallel AD, O_1H \parallel AC, O_2H \parallel AB$$

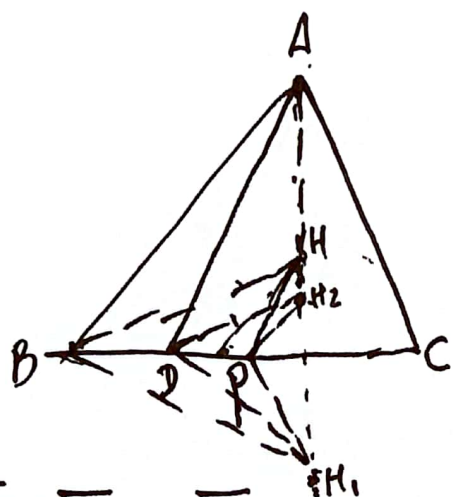
$$HP \parallel AD, BH \parallel DH_2$$

$$BH_1 \perp AD \Rightarrow BH_1 \perp HP, HH_1 \perp BC$$

$$\Rightarrow P \text{ 是 } \triangle BH_1H \text{ 之心} \Rightarrow PH_1 \perp BH$$

$$\Rightarrow PH_1 \perp DH_2 \Rightarrow P \text{ 是 } \triangle DH_1H_2 \text{ 之心}$$

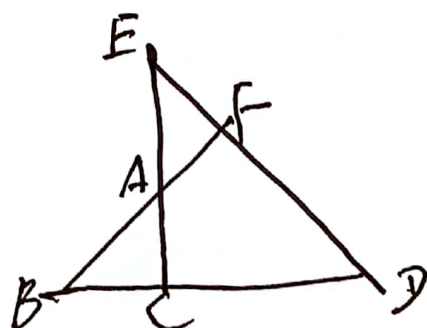
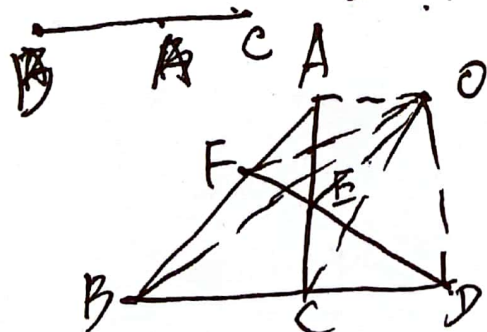
$$\Rightarrow H_1P \parallel AC, PH_2 \perp PH_1 \Rightarrow PH_2 \parallel AB$$



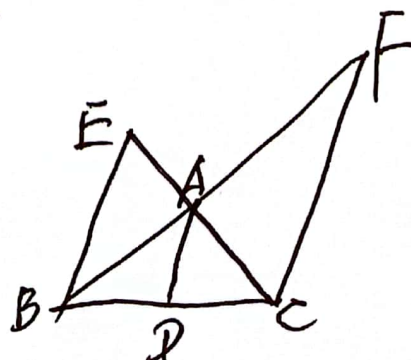
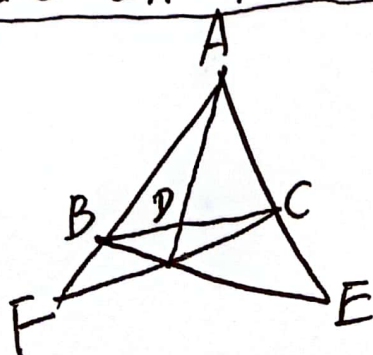
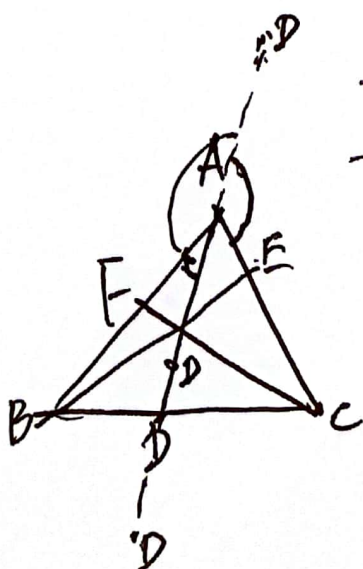
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

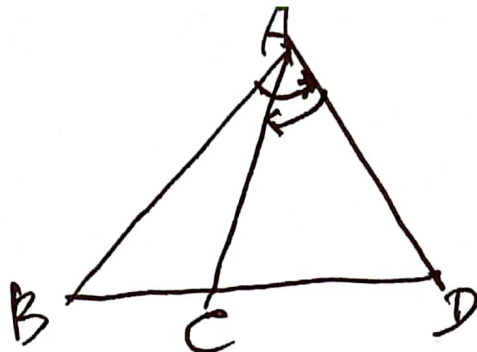
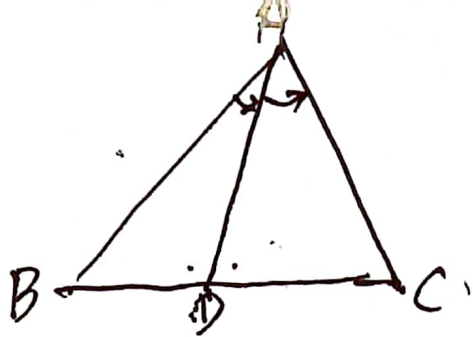
三. Menelaus定理与Ceva定理的角元形式

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$



$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -1$$





$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\angle BAD}{\angle DAC} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\angle BAD}{\angle DAC}$$

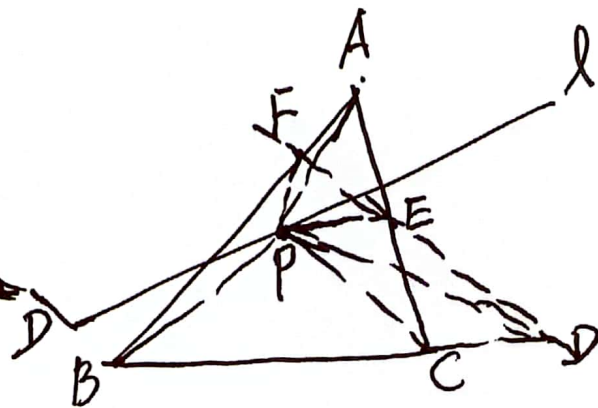
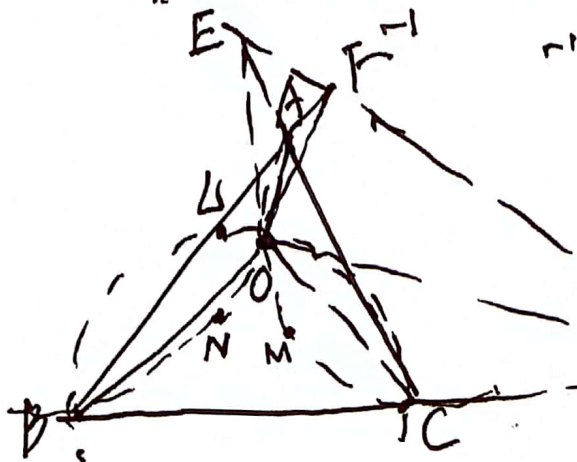
引理 设 D, E, F 是 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 上之点， O 是 $\triangle ABC$ 内一点，则

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\angle BAD}{\angle DAC} \cdot \frac{\angle CBE}{\angle EBA} \cdot \frac{\angle ACF}{\angle FCB}$$

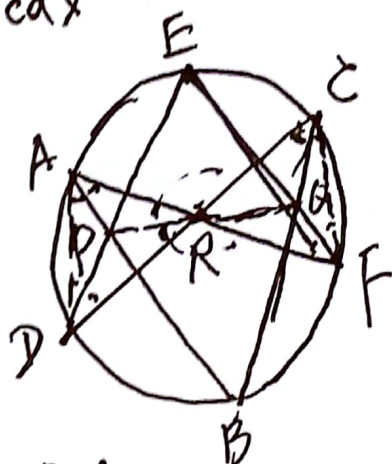
$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\angle CBE}{\angle EBA}, \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\angle ACF}{\angle FCB}$$

$$I) \frac{\angle BAD}{\angle DAC} \cdot \frac{\angle CBE}{\angle EBA} \cdot \frac{\angle ACF}{\angle FCB} = 1$$

$$II) \frac{\angle BOD}{\angle DOC} \cdot \frac{\angle COE}{\angle EOA} \cdot \frac{\angle AOF}{\angle FOB} = 1$$



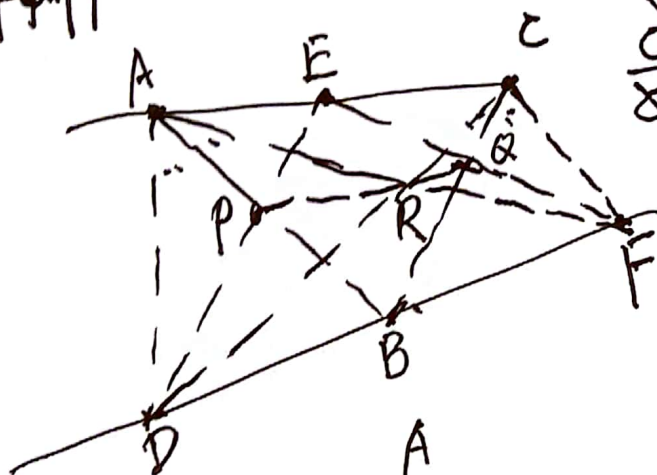
pascal



$$\frac{\angle DCB}{\angle BCF} \cdot \frac{\angle CFE}{\angle EFA} \cdot \frac{\angle FRP}{\angle PRC} =$$

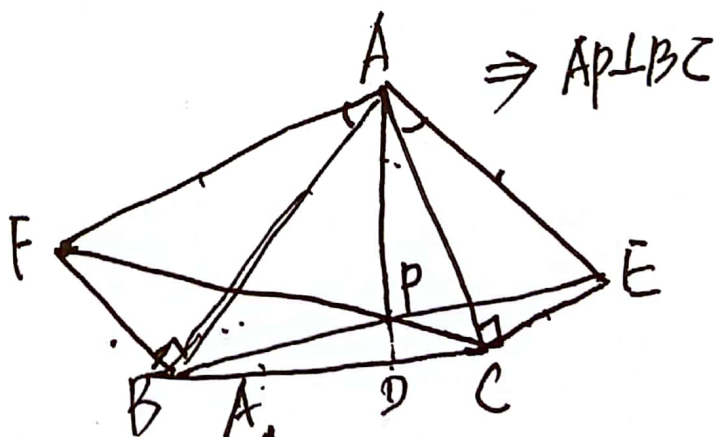
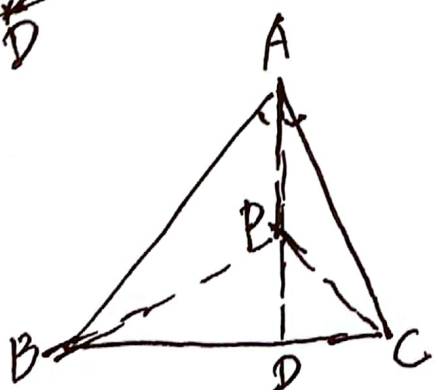
$$\frac{\angle DAB}{\angle BAF} \cdot \frac{\angle CDE}{\angle EDA} \cdot \frac{\angle ARP}{\angle PRD} = 1$$

pappus

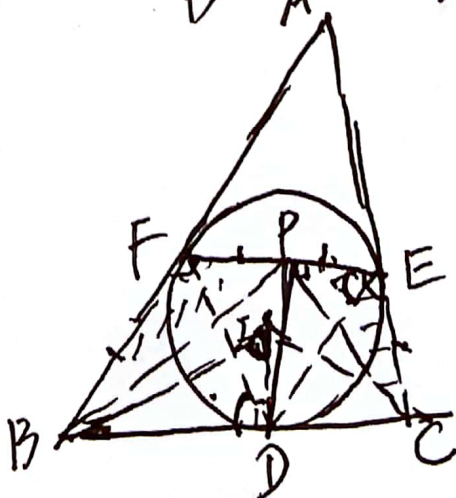


$$\frac{CA}{CF} \cdot \frac{\angle DCB}{\angle BCF} = \frac{DB}{BF} = \frac{AD}{AF} \cdot \frac{\angle DAB}{\angle BAF}$$

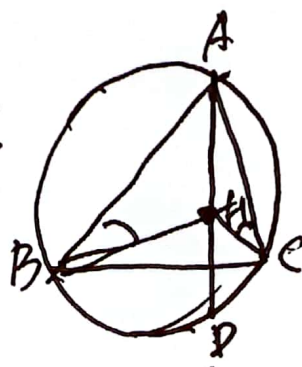
$$\frac{CF}{AF} \cdot \frac{\angle CFE}{\angle EFA} = \frac{CR}{AR} \cdot \frac{\angle CDE}{\angle EDA}$$



$\Rightarrow AP \perp BC$

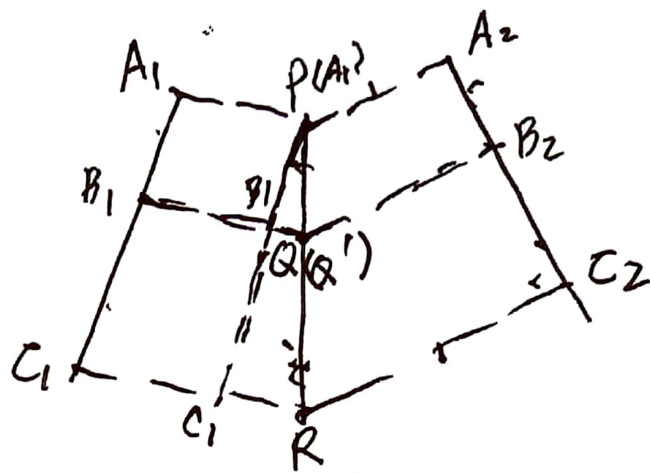


$\triangle IBD \sim \triangle EDP$
 $\triangle ICD \sim \triangle FDP$



の証明は点共線に一方方法

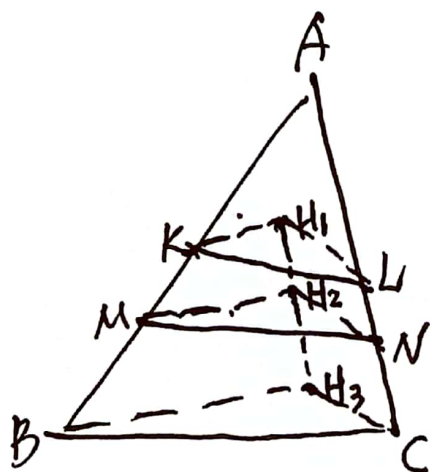
定理 P, Q, R は点共線 $\iff \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$



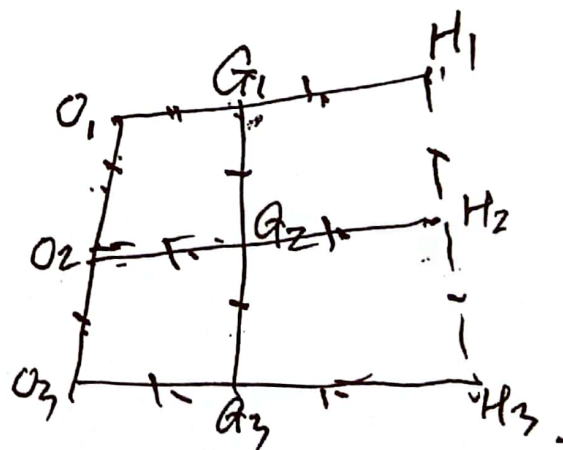
$$\frac{PQ'}{Q'R} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$

$PA_2 \parallel RC_2 \Rightarrow$

$PA_2 \parallel Q'B_2 \parallel RC_2$



$$\frac{KM}{MB} = \frac{LN}{NC} \quad \checkmark$$



$$\underline{AB \cdot AE = AD^2 = AC \cdot AF}$$

$$AM \cdot AE = AN \cdot AF$$

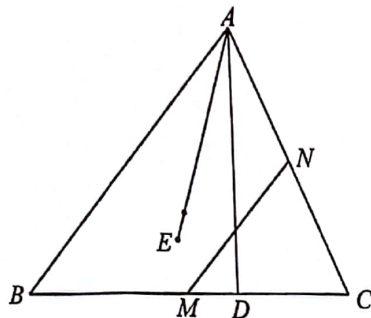
$\triangle PME \sim \triangle FNF$

X, Y 为其相似对应点

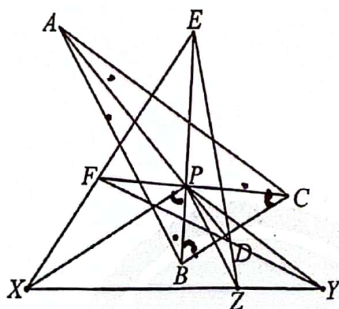
$$\Rightarrow \frac{XM}{ME} = \frac{YN}{NF}$$

平面几何问题

01. 设 AD 是锐角 $\triangle ABC$ 的高, M 、 N 分别是边 BC 、 CA 的中点, E 是点 D 关于直线 MN 的对称点. 求证: $\triangle ABC$ 的外心在直线 AE 上.

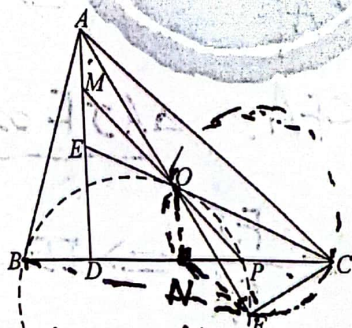


02. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, D 、 E 、 F 三点分别在直线 AP 、 BP 、 CP 上. 过点 P 作 BC 、 CA 、 AB 的平行线与直线 EF 、 FD 、 DE 分别交于点 X 、 Y 、 Z . 求证: X 、 Y 、 Z 三点共线.



$$\frac{\sin \angle EPX}{\sin \angle XPF} \cdot \frac{\sin \angle FPY}{\sin \angle YPD} \cdot \frac{\sin \angle DPZ}{\sin \angle ZPE} = \frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle PGB} \cdot \frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle PAC} \cdot \frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle PBA} = 1$$

03. 设 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心, AD 是 $\triangle ABC$ 的高 (D 在 BC 上), 直线 AD 与 CO 交于 E , M 是 AE 上一点, 过 C 作 AO 的垂线, 垂足为 F , 直线 OM 与 BC 交于 P . 求证: O 、 B 、 F 、 P 四点共圆的充分必要条件是 M 为 AE 的中点.



$$\angle AOE = \angle FOC = \angle FNC \quad ON \parallel AD$$

$$\angle EAO = \angle NOF = \angle NCF \Rightarrow$$

$$\triangle AEO \sim \triangle CFN \Rightarrow \frac{AO}{CN} = \frac{AE}{CF} \Rightarrow$$

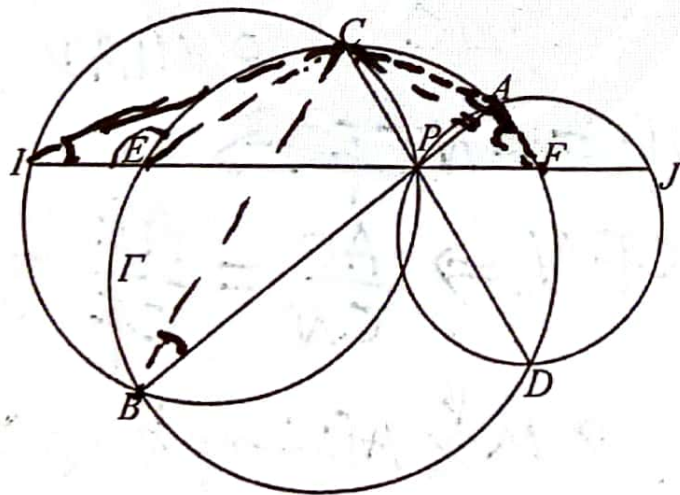
$$\frac{AO}{CB} = \frac{AE}{2CF} \Rightarrow M \text{ 是 } AE \text{ 的中点} \Leftrightarrow AE = 2AM$$

$$\Leftrightarrow \frac{AO}{CB} = \frac{AM}{CF} \Leftrightarrow \triangle AOM \sim \triangle CBF \Leftrightarrow \angle AOM = \angle FBC \Leftrightarrow$$

$$\angle FOP = \angle FBP \Leftrightarrow O, B, F, P \text{ 共圆}.$$



06. 圆 Γ 的弦 AB 与 CD 交于 P , 过 P 的一条直线与圆 Γ 交于 E 、 F 两点, 与圆 (PBC) 交于另一点 I , 与圆 (PAD) 交于另一点 J . 求证: $IE = JF$.



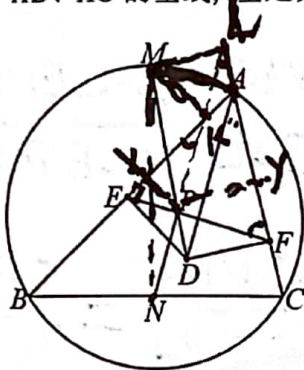
$$\left. \begin{aligned} \angle EIC &= \angle ABC = \angle AFC \\ \angle CEI &= \angle CAF \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\triangle CIE \sim \triangle CFA, \quad \underline{\triangle AJF \sim \triangle AEC}$$

$$\frac{IE}{FA} = \frac{CE}{CA} = \frac{FJ}{FA} \Rightarrow IE = FJ.$$

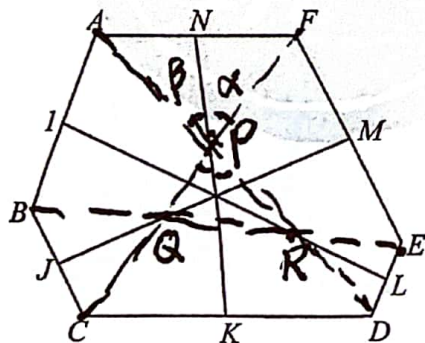


08. 设 M 、 N 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆上 $\widehat{BAC}$ 的中点与 BC 边的中点, 过 $\angle BAC$ 的角平分线上一点 D 作 AB 、 AC 的垂线, 垂足分别为 E 、 F , 过点 N 作 EF 的垂线, 垂足为 P . 求证: D 、 P 、 M 三点共线.



$AD \perp EF$, $PN \perp EF \Rightarrow PN \parallel AD$. $MK \perp AB$, $ML \perp AC$,
 $MN \perp BC$ 由 Simson 定理, K, L, M 共线.
 $KL \perp AM$, $AD \perp AM \Rightarrow KL \parallel AD \Rightarrow K, L, M, P$ 共线.
 $\triangle PEK \sim \triangle PFL$, X, Y 为其相似对应点.
 $\frac{KX}{XE} = \frac{LY}{YF}$. $ED \parallel XP \parallel KM$, $FD \parallel YP \parallel LM$. $\Rightarrow D, P, M$ 共线.

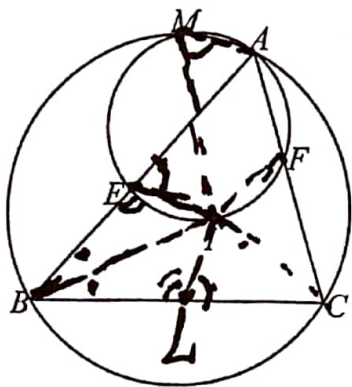
09. 设六边形 $ABCDEF$ 的三组对边分别平行, I 、 J 、 K 、 L 、 M 、 N 分别是边 AB 、 BC 、 CD 、 DE 、 EF 、 FA 的中点. 求证: IL 、 JM 、 KN 三线共点.



$$1 = \frac{FN}{NA} = \frac{PF}{PA} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{PA}{PF} = \frac{AD}{CF}$$



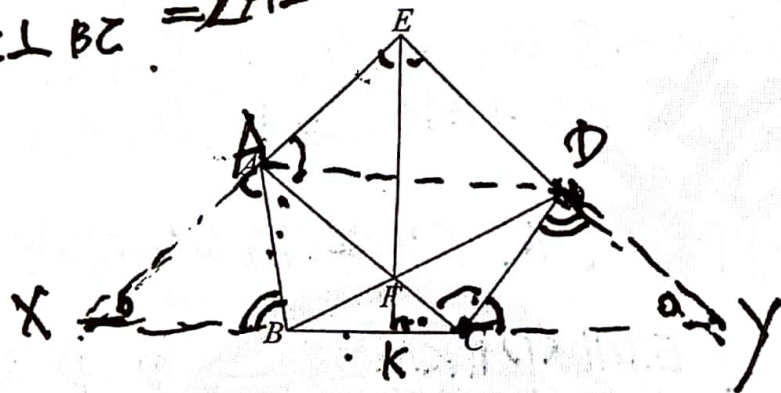
10. 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, M 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上 $\widehat{BAC}$ 的中点, 圆 (AMI) 与 AB 、 AC 的另一交点分别为 E 、 F . 求证: $BE = CF = \frac{1}{2}BC$.



$$\triangle IEB \cong \triangle ILB \Rightarrow BE = BL = \frac{1}{2}BC$$

11. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, $AB = BC = CD$, $\angle BAE = \angle DCB$, $\angle EDC = \angle CBA$, AC 与 BD 交于 F . 求证: $EF \perp BC$.

$EK \perp BC \Rightarrow \angle AEK = \angle KED$.

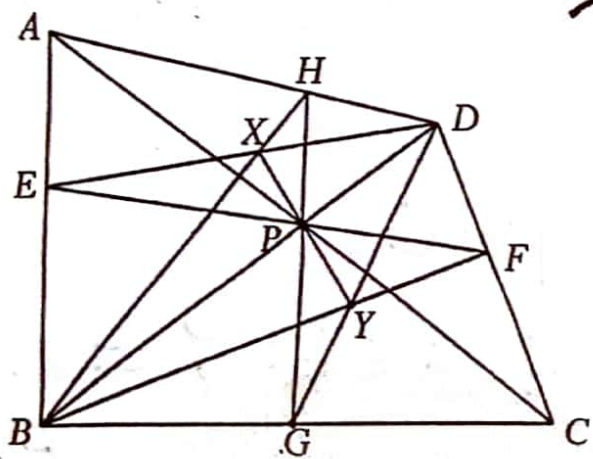


$$\frac{\angle AEK}{\angle KED} \cdot \frac{\angle DAC}{\angle CAE} \cdot \frac{\angle EDB}{\angle BDA} =$$

$$\frac{\angle DAC}{\angle DCA} \cdot \frac{\angle DBA}{\angle BDA} = \frac{CD}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} = 1$$



14. 设四边形 $ABCD$ 的两对角线 AC 与 BD 交于 P , 过点 P 作两条直线, 一条直线与 AB 、 CD 分别交于点 E 、 F , 另一条直线与 BC 、 AD 分别交于点 G 、 H , BH 与 DE 交于点 X , BF 与 DG 交于点 Y . 求证: X 、 P 、 Y 三点共线.



重新定义点 Y : $\{Y\} = XP \cap BF$. 改证 D, Y, G 共线.

$$\frac{\sphericalangle BPG}{\sphericalangle GPC} \cdot \frac{\sphericalangle CPD}{\sphericalangle DPF} \cdot \frac{\sphericalangle FPX}{\sphericalangle YPB} =$$

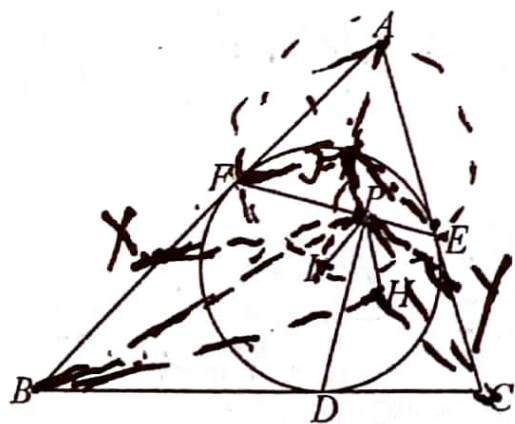
$$\frac{\sphericalangle DPH}{\sphericalangle HPA} \cdot \frac{\sphericalangle APB}{\sphericalangle BPE} \cdot \frac{\sphericalangle EPX}{\sphericalangle XPD} = 1$$

$\Rightarrow G, D, Y$ 共线.

$\triangle EDA$. 截线 $HPBX$.



17. 设锐角 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC 、 CA 、 AB 分别切于 D 、 E 、 F , P 是 D 在 EF 上的射影, I 、 H 分别是 $\triangle ABC$ 的内心和垂心. 求证: PD 平分 $\angle IPH$.



I. $\triangle DEF$ 对称. 需证: J, P, H 共线.
 J 是 $\triangle AEF$ 的垂心.

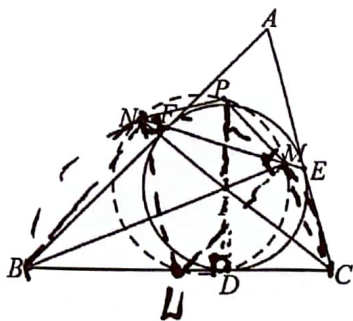
$\triangle PFB \sim \triangle PEC$.

$\angle PXF = \angle HBA = \angle ACH = \angle EYP$

$\Rightarrow X, Y$ 为 $\triangle PFB$ 与 $\triangle PEC$ 的相似对应点 $\Rightarrow \frac{PX}{XB} = \frac{EY}{YC}$
 $\therefore J, P, H$ 共线.

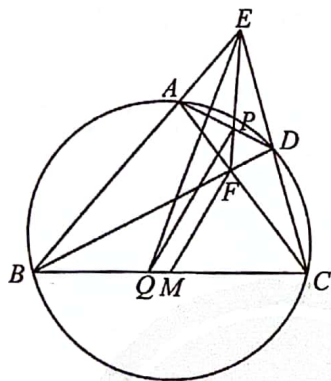


19. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与 BC 、 CA 、 AB 分别切于 D 、 E 、 F ， I 是 $\triangle ABC$ 的内心，直线 BI 、 CI 与直线 EF 分别交于 M 、 N ，过点 M 且垂直于 AB 的直线与过点 N 且垂直于 AC 的直线交于 P 。求证： D 、 M 、 P 、 N 四点共圆。

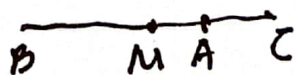
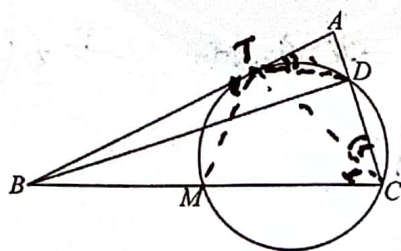


$MB \perp MC$, $NB = NC$ $LM \parallel AB$, $LN \parallel AC$
 M, N 均在以 BC 为直径的圆上. $MP \perp AB$
 $\Rightarrow MP \perp LM \Rightarrow MP$ 是切线. 同理 NP 也是
 $\Rightarrow PI \perp BC$. $ID \perp BC \Rightarrow P, I, D$ 共线
 $\Rightarrow PD \perp BC \therefore \Rightarrow P, M, L, D, N$ 共圆.

20. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，直线 AB 与 CD 交于 E ，对角线 AC 与 BD 交于 F ， EF 与 AD 交于 P ， M 是 BC 的中点， Q 是 BC 上一点，且 $\angle BEQ = \angle FEC$ 。求证： $PQ \parallel FM$ 。



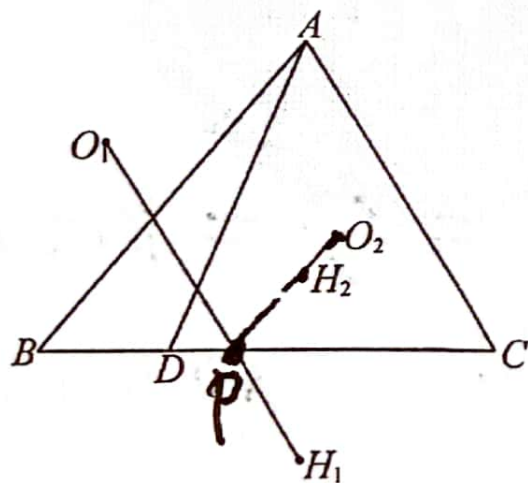
21. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB + AC = \sqrt{2}BC$ ， M 是 BC 的中点，点 D 在 AC 上，且 $BD \perp AC$ 。求证：圆 (MCD) 与 AB 相切。



$BT = TA + AC$
 $BT^2 = \left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{2} = BM \cdot BC$
 $\Rightarrow \angle BTM = \angle TCM$. $AD = AB \cos A$.
 $AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2AB \cdot AC \cos A$
 $= \frac{1}{2}(AB+AC)^2 + 2AD \cdot AC$
 $\Rightarrow (AB-AC)^2 = 4AD \cdot AC \Rightarrow AM^2 = AD \cdot AC \Rightarrow \angle DTA = \angle DCT$
 $\angle MTD + \angle DCM = \angle BTM + \angle MTD + \angle DTA = 180^\circ$
 $AB - AC = 2AM$.



24. 设 D 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点, O_1, H_1 分别是 $\triangle ABD$ 的外心和垂心, O_2, H_2 分别是 $\triangle ACD$ 的外心和垂心. 求证: $O_1H_1 \parallel AC$ 的充分必要条件是 $O_2H_2 \parallel AB$.



设 $O_1H_1 \cap BC = \{P\} \Rightarrow O_2P \parallel AB$,
~~且~~ $H_2P \parallel AB \Rightarrow O_2, H_2, P$ 共线,
 $\Rightarrow O_2H_2 \parallel AB$.

