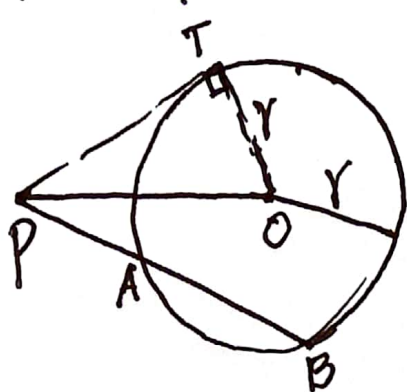


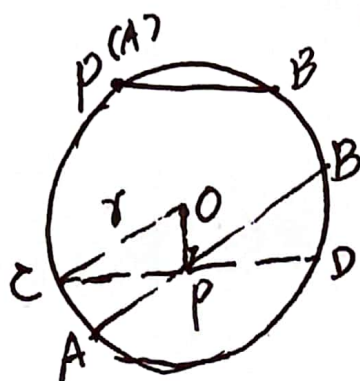
$$|p o^2 - r^2|$$

五. 点对圆之幂

代数量



$$p(p) = p o^2 - r^2$$

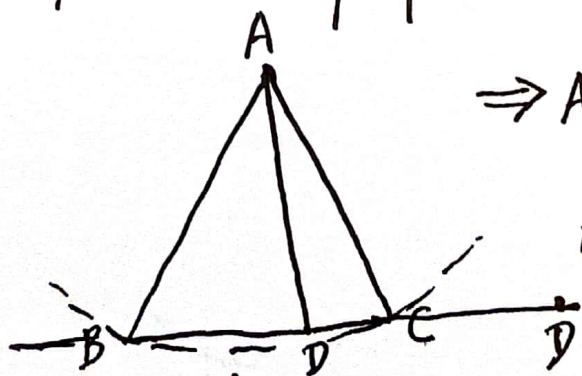


$$\begin{aligned} p(p) &= -p c^2 = -p c \cdot p d \\ &= -p a \cdot p b \\ &= \overline{p a} \cdot \overline{p b} \end{aligned}$$

$$p(p) \begin{cases} > 0 \Leftrightarrow \text{点 } P \text{ 在圆外} \\ = 0 \Leftrightarrow \dots \text{ 上} \\ < 0 \Leftrightarrow \dots \text{ 内} \end{cases}$$

$$1. p(p) = p(q) \Leftrightarrow op = oq$$

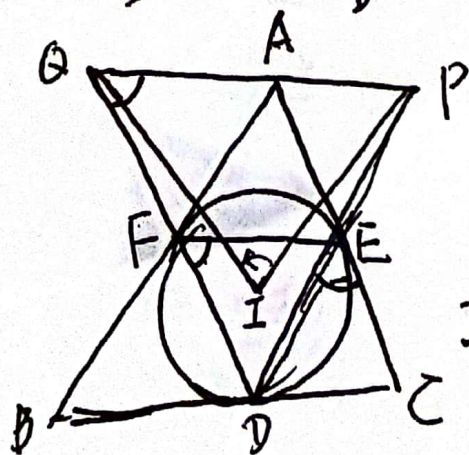
2 (圆幂定理) 给定圆 Γ 与点 P , 过点 P 作圆 Γ 的一条割线 PAB (A, B 可以重合), 则 $\overline{p a} \cdot \overline{p b}$ 是一个常量, 这个常量不是别的, 正是点对圆 Γ 之幂, 即 $\overline{p a} \cdot \overline{p b} = p(p)$.



$$\Rightarrow AB^2 - AD^2 = BD \cdot DC$$

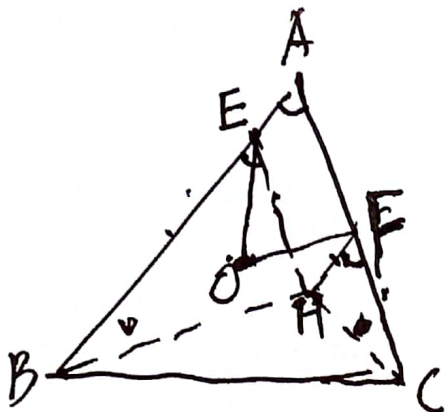
$$AD^2 - AB^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DC}$$

$$\Rightarrow \angle P I Q < 90^\circ$$



$$\begin{aligned} PA \cdot PQ &= PD \cdot PE = IP^2 - r^2 < IP^2 \\ + AQ \cdot PQ &< IQ^2 \\ \hline PQ^2 &< IP^2 + IQ^2 \end{aligned}$$





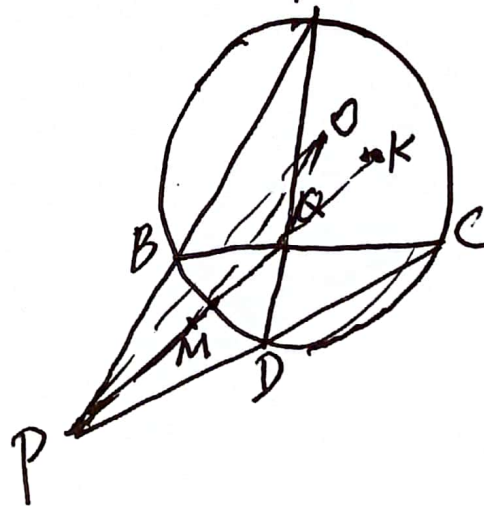
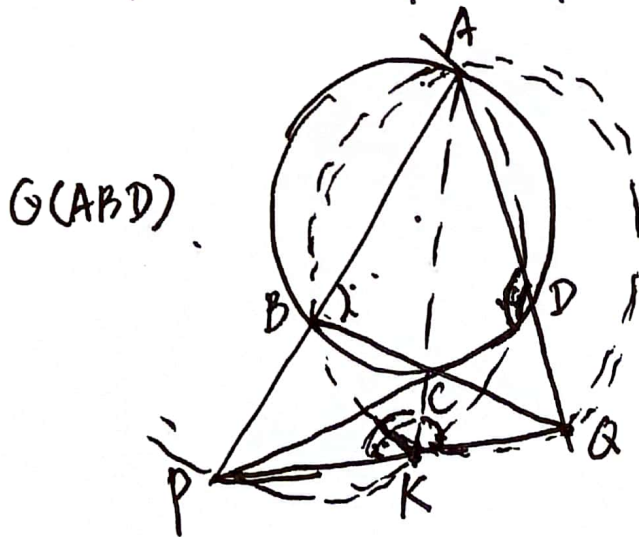
$$\Rightarrow OE = OF \Leftrightarrow \rho(E) = \rho(F) \Leftrightarrow$$

$$EA \cdot EB = FA \cdot FC \Leftrightarrow HF \cdot EB = HE \cdot FC \Leftrightarrow$$

$$\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{HF} \Leftrightarrow \triangle HEB \sim \triangle HFC \Leftrightarrow$$

$$\angle HBA' = \angle ACH \checkmark$$

$$3. A, B, C, D \text{ 共圆} \Leftrightarrow \rho(P) + \rho(Q) = PA^2$$



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{AQ} \cdot \overline{DQ}$$

$$\overline{PK} \cdot \overline{PQ} + \overline{KQ} \cdot \overline{PQ} = (\overline{PK} + \overline{KQ}) \cdot \overline{PQ} = PQ^2$$

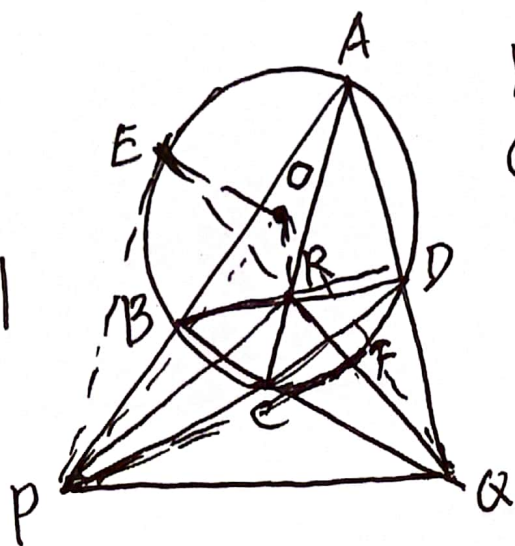
$$4. A, B, C, D \text{ 共圆} \Leftrightarrow \rho(M) = MP^2$$

$$\begin{aligned} \rho(M) &= OM^2 - r^2 = \frac{1}{2}(OP^2 - r^2 + OQ^2 - r^2) - \frac{1}{4}PQ^2 \\ &= \frac{1}{2}(\rho(P) + \rho(Q)) - \frac{1}{4}PQ^2 \end{aligned}$$

$$A, B, C, D \text{ 共圆} \Leftrightarrow \rho(P) + \rho(Q) = PQ^2 \Leftrightarrow$$

$$\rho(M) = \frac{1}{2}PQ^2 - \frac{1}{4}PQ^2 = \frac{1}{4}PQ^2 = MP^2$$

$$|PO^2 - r^2|$$



Brocard 定理:
(布洛卡)

$$\frac{PCP + P(Q) = PQ^2}{PCP + P(R) = PR^2}$$

$$P(Q) - P(R) = PQ^2 - PR^2$$

$$OQ^2 - OR^2 = PQ^2 - PR^2$$

$$OQ^2 - OR^2 = PQ^2 - PR^2$$

$$\Rightarrow OP \perp QR$$

定差幂线.

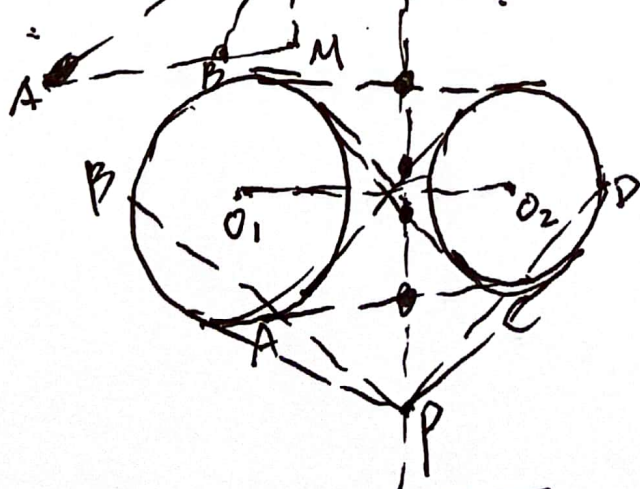
$$OP^2 - OE^2$$

$$PE^2 + OQ^2 - OE^2 = PQ^2 - PE^2$$

$$OP \perp QE, OP \perp QF$$

$$PA^2 - PB^2 = k$$

两圆之根轴.

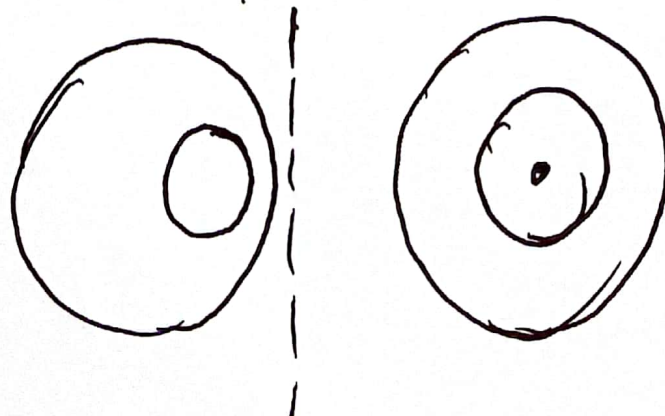


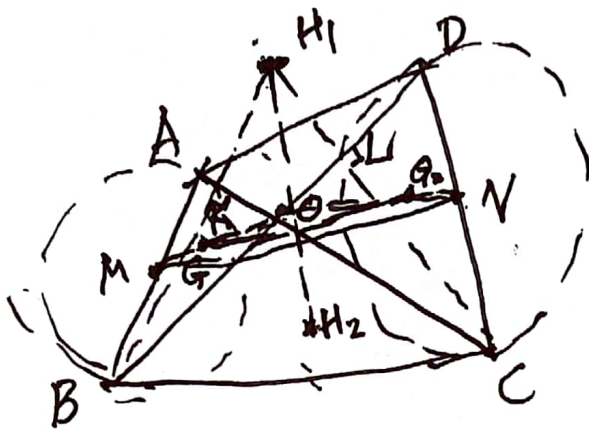
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

$$PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$$

$$PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2$$

$$PO_1^2 + PO_2^2 = r_1^2 + r_2^2$$

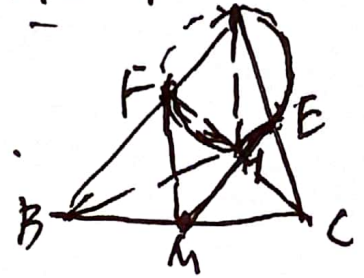




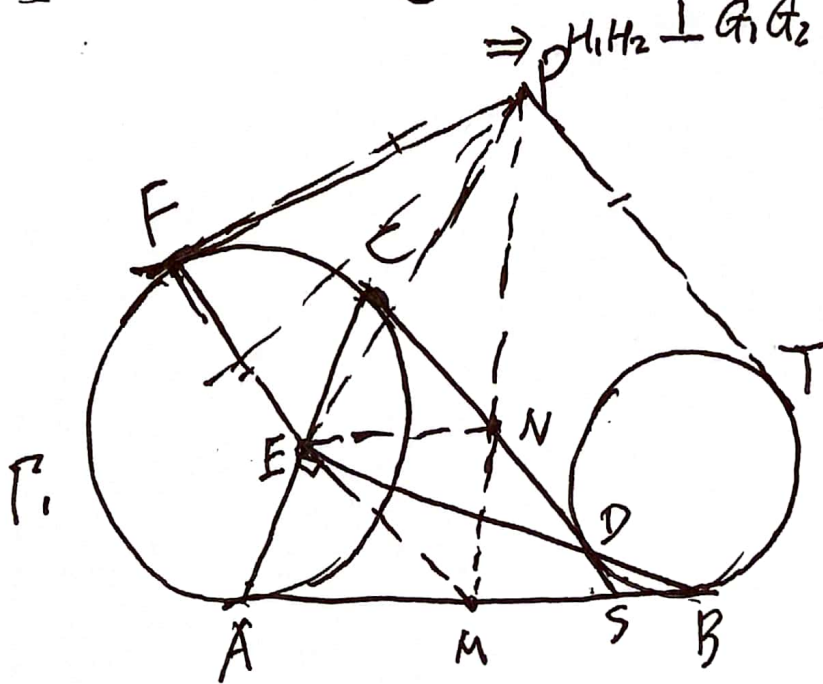
$$\Rightarrow H_1 H_2 \perp MN$$

$$H_1 K \cdot H_1 B = H_1 L \cdot H_1 C$$

$$G_1 G_2 \parallel MN$$



$$\Rightarrow PT = PF$$



$$ME = MA$$

$$NE = NC$$

$$PE = PF$$

M, N, P 共线 点 E 与圆 P1 的根轴 $\Rightarrow$ M, N, P

共线.

共轴圆

同轴圆

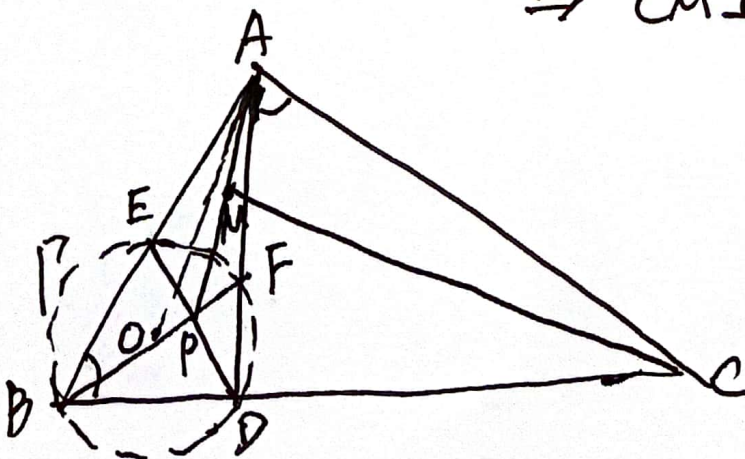
$$\angle DAC = \angle CBA$$

$$\Rightarrow CM \perp AO$$

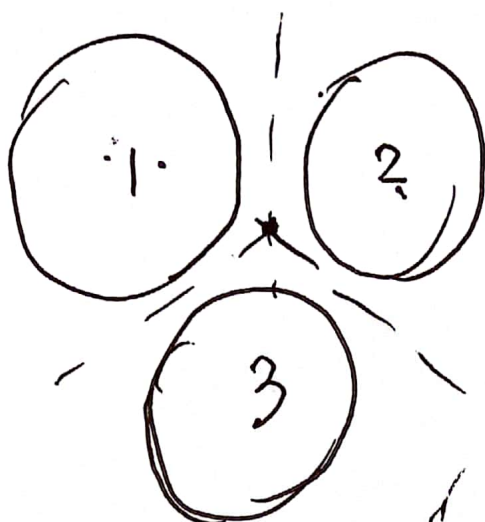
$$CA^2 = CB \cdot CD = PC$$

$$MA^2 = PM$$

CM 是点 A 与圆 P 的根轴 $\Rightarrow CM \perp AO$



X. 三圓之根心.



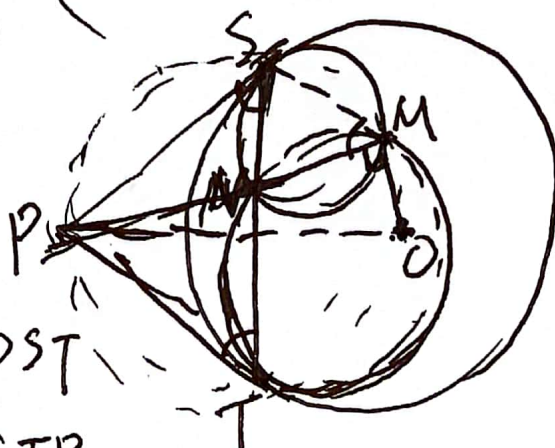
根心定理.

蒙日定理

S, N, T 共线 $\Leftrightarrow OM \perp MN$.

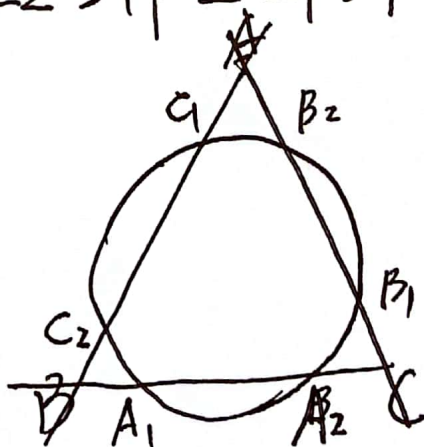
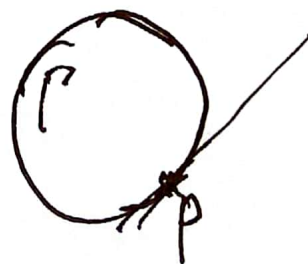
" $\Rightarrow$ "

$$\angle SMP = \angle PSN = \angle PST = \angle STP.$$



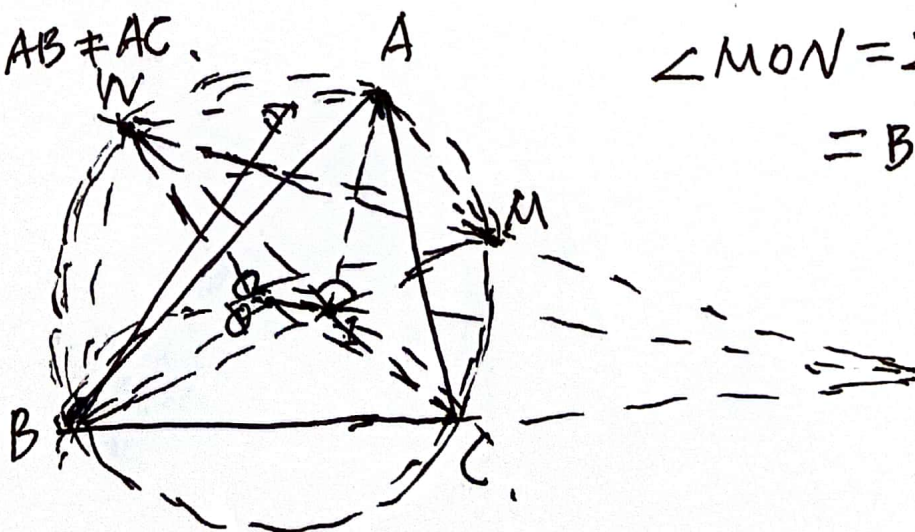
" $\Leftarrow$ " $\angle PSN = \angle SMP = \angle STP = \angle PST$.

Davis 定理.



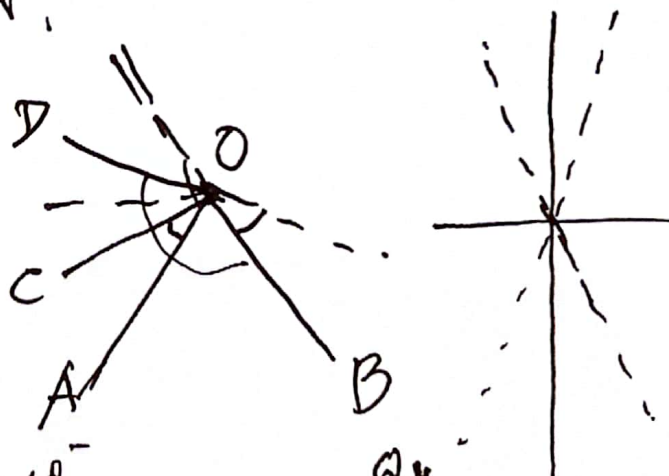
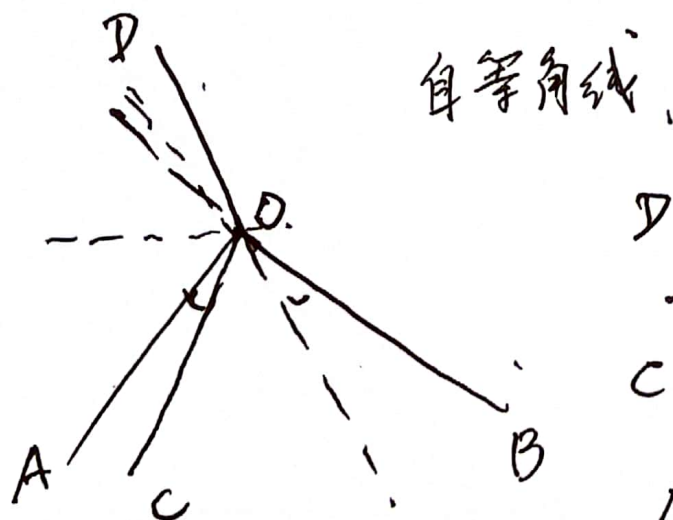
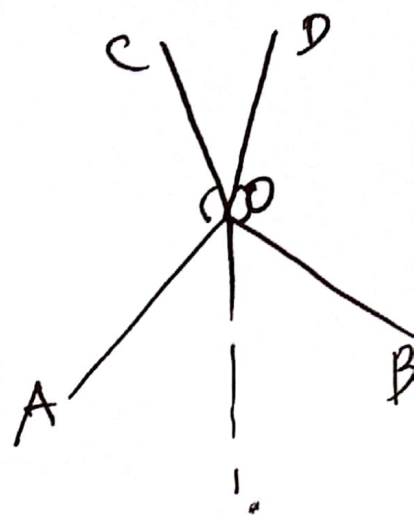
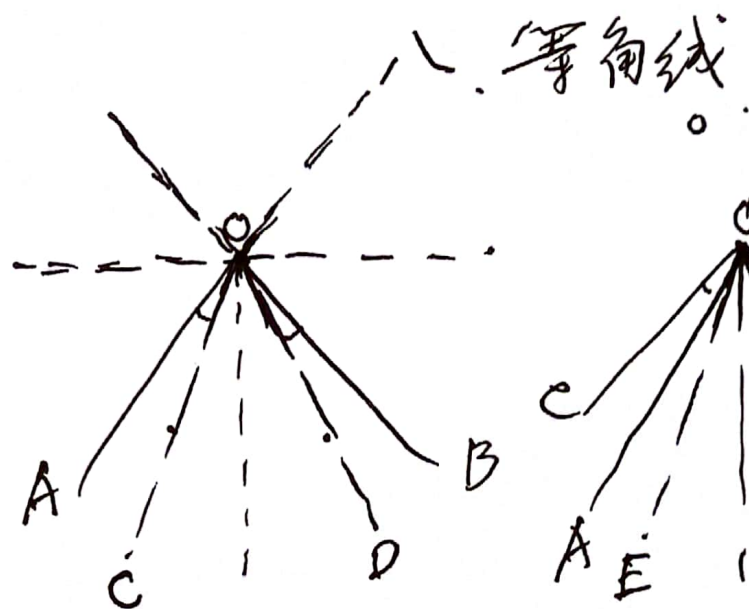
$$\angle A = 60^\circ.$$

$$AB \neq AC.$$

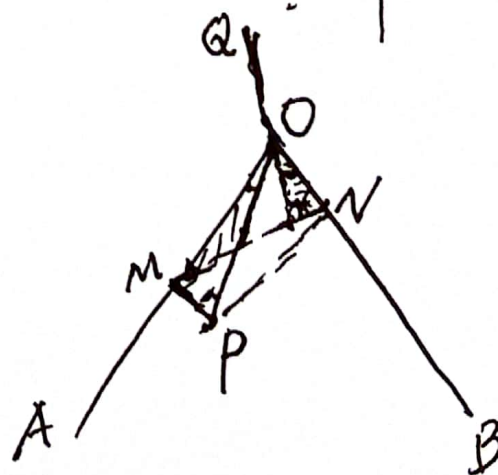
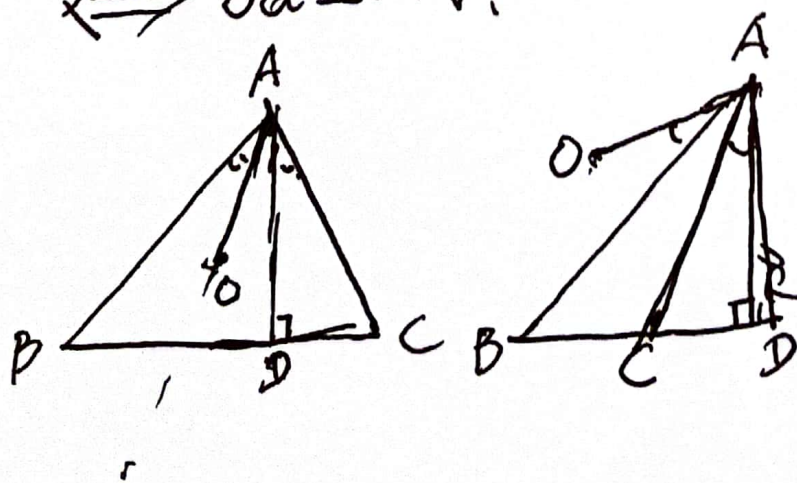


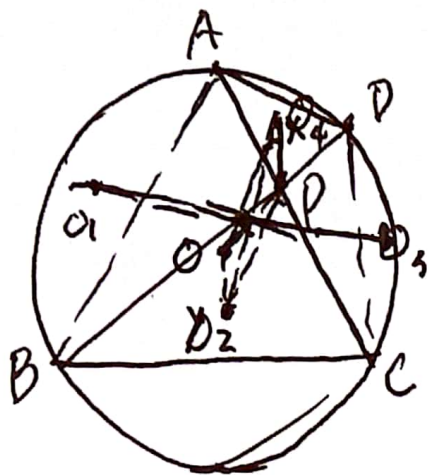
$$\begin{aligned} \angle MON &= 2(\angle MBA + \angle ABN) \\ &= B + C = 120^\circ. \end{aligned}$$





1. OA 是 OP 关于 $\angle AOB$ 的等角线
 $\Leftrightarrow OA \perp MN$

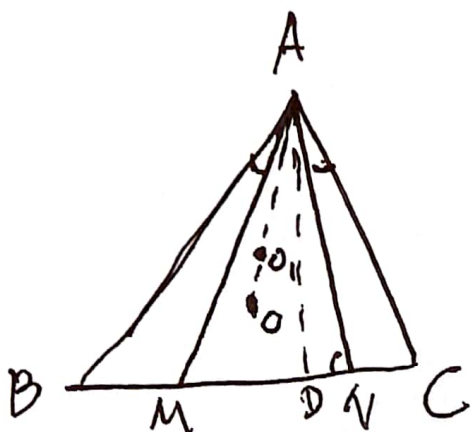




$$\Rightarrow PX \perp BC$$

$$\triangle PAD \sim \triangle PBC$$

$$O_1 O_3, O_2 O_4, OP \equiv \text{线共点.}$$



$$\angle BAO_1 = \angle BAM + \angle MAO_1$$

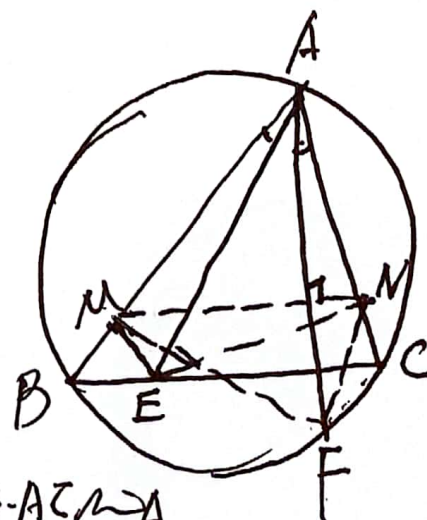
$$= \angle NAC + 90^\circ - \angle ANM$$

$$= 90^\circ - C = \angle BAO.$$

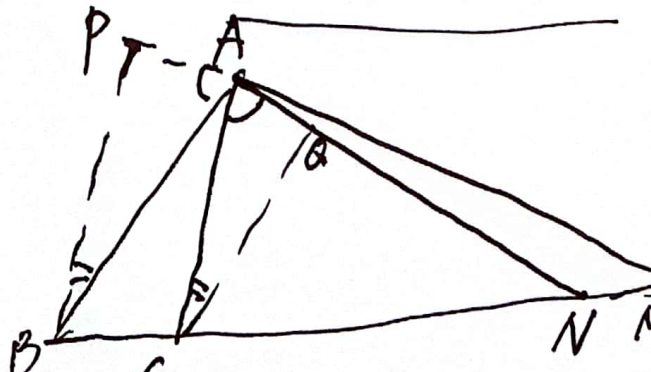
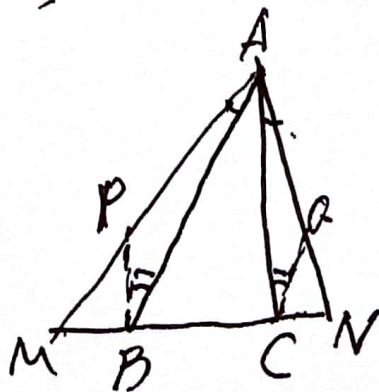
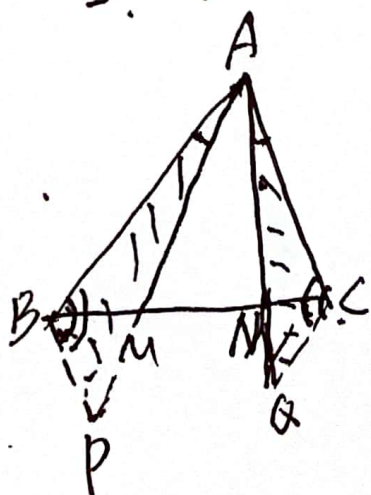
$$2. AE \cdot AF = AB \cdot AC$$

$$S_{AMFN} = S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{1}{2} AF \cdot MN = \frac{1}{2} AF \cdot AE \cdot \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \frac{1}{\sin A}$$



$$3. AM \cdot AN \text{ 关于 } \angle BAC \text{ 有等角线} \Leftrightarrow \frac{BM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

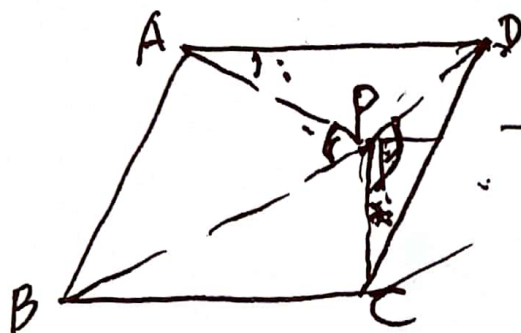


$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} = \frac{BP}{AC} \cdot \frac{AB}{CQ} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BP}{CQ}$$

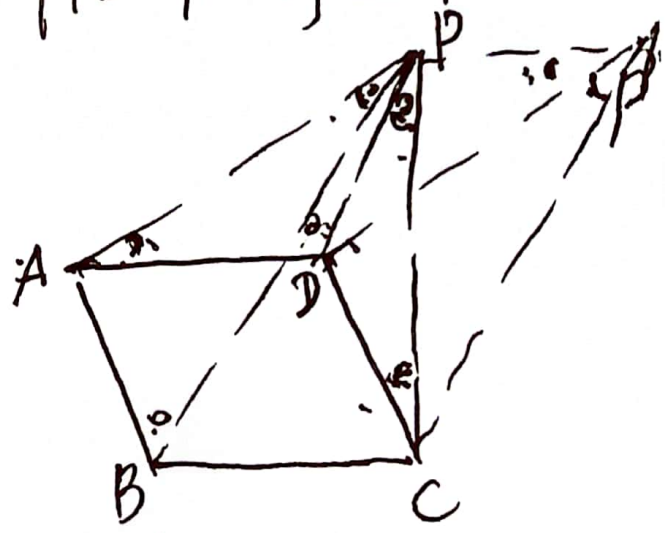
$$\frac{MB}{BN} \cdot \frac{MC}{CN} = \frac{AM^2}{AN^2}$$



4. P 是 $\square ABCD$ 所在平面内一点, 则 PB, PD 关于 $\angle APC$ 互为等角线 $\Leftrightarrow \angle PAD = \angle DCP$.

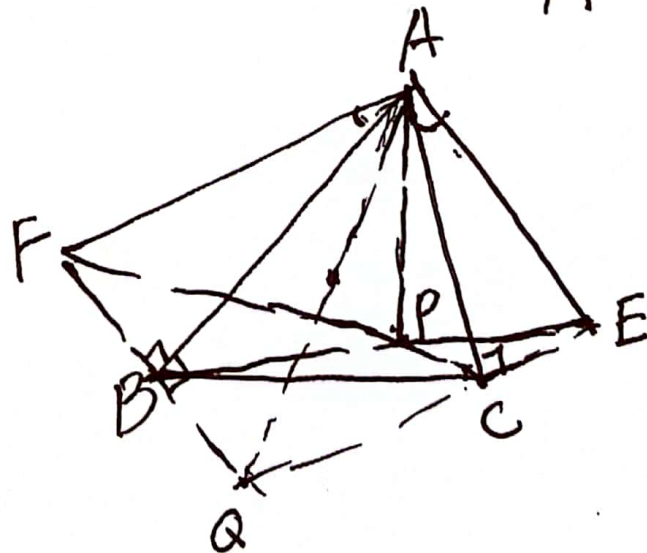
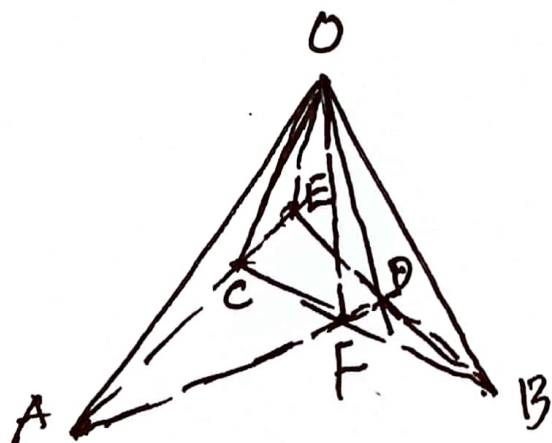


$\rightarrow P'$



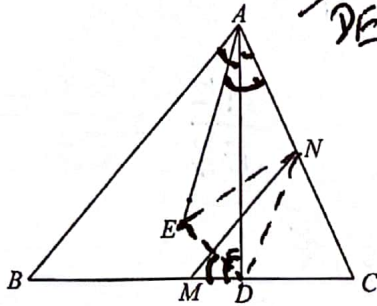
$AP \perp BC$

5



平面几何问题

01. 设 AD 是锐角 $\triangle ABC$ 的高, M, N 分别是边 BC, CA 的中点, E 是点 D 关于直线 MN 的对称点. 求证: $\triangle ABC$ 的外心在直线 AE 上.



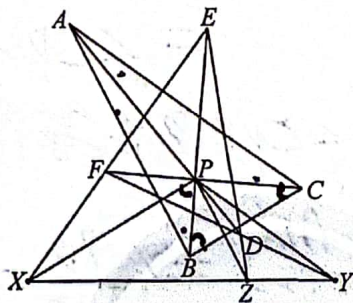
$\angle BAD = \angle EDB$
 $DE \perp AB \Rightarrow$

$$NA = NC = ND = NE \Rightarrow A, E, O, C$$

共圆 $\Rightarrow \angle EDB = \angle EAC$

$$\angle BAD = \angle EAC$$

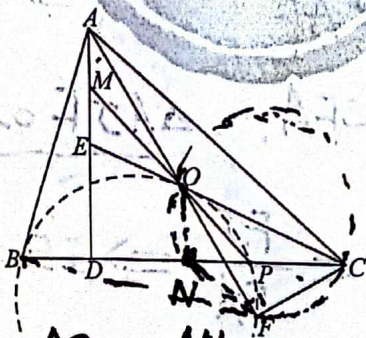
02. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, D, E, F 三点分别在直线 AP, BP, CP 上. 过点 P 作 BC, CA, AB 的平行线与直线 EF, FD, DE 分别交于点 X, Y, Z . 求证: X, Y, Z 三点共线.



$$\frac{\sin \angle EPX}{\sin \angle XPF} \cdot \frac{\sin \angle FPY}{\sin \angle YPD} \cdot \frac{\sin \angle DPZ}{\sin \angle ZPE} =$$

$$\frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle PCB} \cdot \frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle PAC} \cdot \frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle PBA} = 1$$

03. 设 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心, AD 是 $\triangle ABC$ 的高 (D 在 BC 上), 直线 AD 与 CO 交于 E , M 是 AE 上一点, 过 C 作 AO 的垂线, 垂足为 F , 直线 OM 与 BC 交于 P . 求证: O, B, F, P 四点共圆的充分必要条件是 M 为 AE 的中点.



$$\angle AOE = \angle FOC = \angle FNC \quad ON \parallel AD$$

$$\angle EAO = \angle NOF = \angle NCF \Rightarrow$$

$$\triangle AEO \sim \triangle CFN \Rightarrow \frac{AO}{CN} = \frac{AE}{CF} \Rightarrow$$

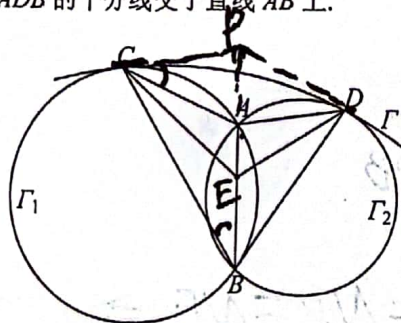
$$\frac{AO}{CB} = \frac{AE}{2CF} \Rightarrow M \text{ 是 } AE \text{ 的中点} \Leftrightarrow AE = 2AM$$

$$\Leftrightarrow \frac{AO}{CB} = \frac{AM}{CF} \Leftrightarrow \triangle AOM \sim \triangle CBF \Leftrightarrow \angle AOM = \angle FBC \Leftrightarrow$$

$$\angle FOP = \angle FBP \Leftrightarrow O, B, F, P \text{ 共圆}$$



04. 设圆 Γ_1 与圆 Γ_2 交于 A, B 两点, 圆 Γ 分别与圆 Γ_1 、圆 Γ_2 内切于 C, D . 求证: $\angle BCA$ 的平分线与 $\angle ADB$ 的平分线交于直线 AB 上.



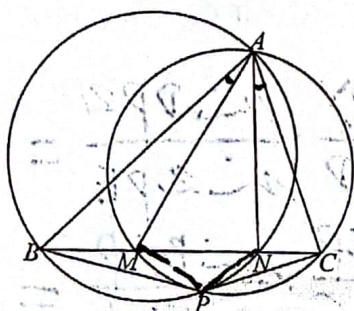
$$\triangle PCA \sim \triangle PBC \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{PC}{PB}$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{PD}{PB} \quad PC = PD \Rightarrow$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \quad \frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

$\Rightarrow DE$ 是 $\angle ADB$ 的平分线

05. 设 M, N 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上两点, 且 $\angle BAM = \angle NAC$. $\triangle ABN$ 的外接圆与 $\triangle AMC$ 的外接圆交于 A, P 两点. 求证: $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.



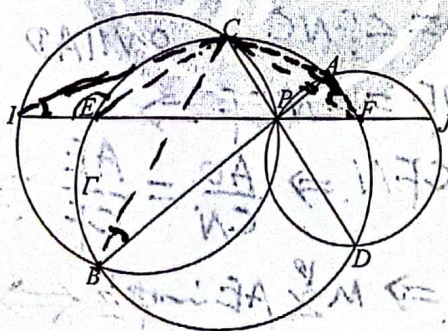
$$\angle NPB = 180^\circ - \angle BAN = 180^\circ - \angle MAC = \angle CPM$$

$\Rightarrow PM, PN$ 是 $\angle CPB$ 的等角线.

$$\Rightarrow \frac{PB^2}{PC^2} = \frac{BM}{MC} \cdot \frac{BN}{NC} = \frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{PM}{PN} = \frac{AM}{AN}$$

06. 圆 Γ 的弦 AB 与 CD 交于 P , 过 P 的一条直线与圆 Γ 交于 E, F 两点, 与圆 (PBC) 交于另一点 I , 与圆 (PAD) 交于另一点 J . 求证: $IE = JF$.



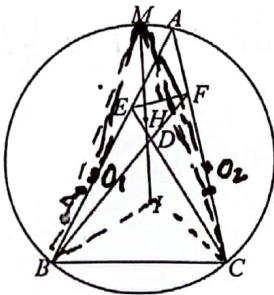
$$\left. \begin{aligned} \angle EIC &= \angle ABC = \angle AFC \\ \angle CEI &= \angle CAF \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\triangle CIE \sim \triangle CFA, \quad \triangle AJF \sim \triangle AEC$$

$$\frac{IE}{FA} = \frac{CE}{CA} = \frac{FJ}{FA} \Rightarrow IE = FJ$$

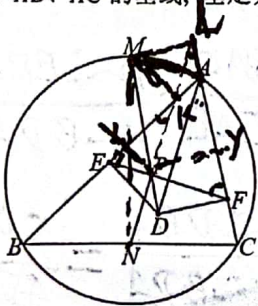


07. 设 E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上的点, 且 $EB = BC = CF$, 直线 CE 与 BF 交于 D ; I 是 $\triangle ABC$ 的内心, H 是 $\triangle DEF$ 的垂心, M 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上 $\widehat{BAC}$ 的中点. 求证: I, H, M 三点共线.



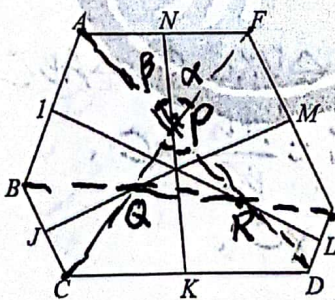
I 是 $\triangle DBE$ 的垂心.
 $P_1: BE$ 为直径的圆. $P_2: CF$ 为直径的圆.
 H, I 两点都在 P_1 与 P_2 的根轴上.
 $\triangle MB_1O_1 \cong \triangle MC_2O_2 \Rightarrow MO_1 = MO_2$ 点 M 也在
 P_1 与 P_2 的根轴上.

08. 设 M, N 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆上 $\widehat{BAC}$ 的中点与 BC 边的中点, 过 $\angle BAC$ 的角平分线上一点 D 作 AB, AC 的垂线, 垂足分别为 E, F , 过点 N 作 EF 的垂线, 垂足为 P . 求证: D, P, M 三点共线.



$AD \perp EF, PN \perp EF \Rightarrow PN \parallel AD. MK \perp AB, ML \perp AC$
 $MN \perp BC$ 由 Simson 定理 K, L, M 共线.
 $KL \perp AM \perp AD \Rightarrow KL \parallel AD \Rightarrow K, L, M, P$ 共线
 $\triangle PEK \sim \triangle PFL, X, Y$ 为其相似对应点.
 $\frac{KX}{XE} = \frac{LY}{YF}, ED \parallel XP \parallel KM, FD \parallel YP \parallel LM \Rightarrow D, P, M$ 共线

09. 设六边形 $ABCDEF$ 的三组对边分别平行, I, J, K, L, M, N 分别是边 AB, BC, CD, DE, EF, FA 的中点. 求证: IL, JM, KN 三线共点.

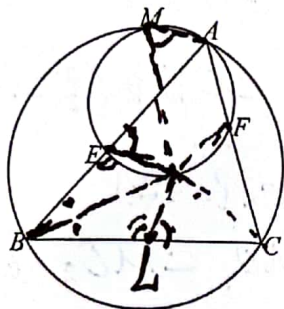


$$I = \frac{FN}{NA} = \frac{PF}{PA} \cdot \frac{NA}{PF} \Rightarrow \frac{NA}{PF} = \frac{PA}{CF} = \frac{AD}{CF}$$





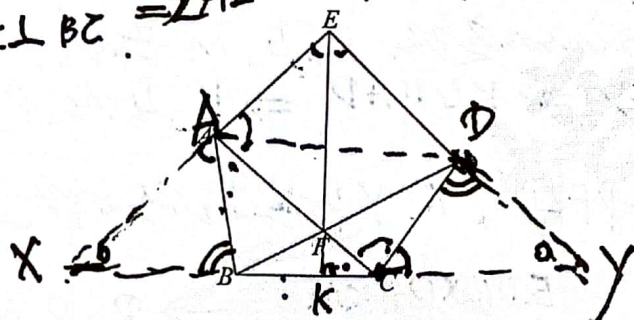
10. 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, M 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上 $\widehat{BAC}$ 的中点, 圆 (AMI) 与 AB 、 AC 的另一交点分别为 E 、 F . 求证: $BE = CF = \frac{1}{2}BC$.



$$\triangle IEB \cong \triangle ILB \Rightarrow BE = BL = \frac{1}{2}BC$$

11. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, $AB = BC = CD$, $\angle BAE = \angle DCB$, $\angle EDC = \angle CBA$, AC 与 BD 交于 F . 求证: $EF \perp BC$.

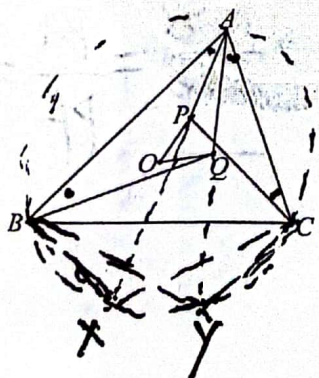
$EK \perp BC \Rightarrow \angle AEK = \angle KED$.



$$\frac{\angle AEK}{\angle KED} = \frac{\angle DAC}{\angle CAE} = \frac{\angle EDB}{\angle BDA} =$$

$$\frac{\angle DAC}{\angle DCA} \cdot \frac{\angle DBA}{\angle BDA} = \frac{CD}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} = 1$$

12. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, P 、 Q 是 $\triangle ABC$ 内两点, 且 $\angle ACP = \angle BAP = \angle QBA = \angle QAC$. 求证: $OP = OQ$.



$$\triangle APC \sim \triangle BXC \quad \triangle PXC \sim \triangle ABC$$

$$PA = \frac{AC}{BC} \cdot XB \quad PX = \frac{AB}{BC} \cdot XC$$

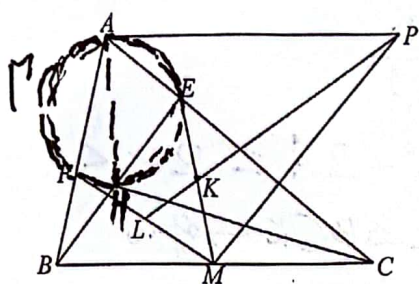
$$PA \cdot PX = \frac{AB \cdot AC}{BC^2} \cdot XB \cdot XC$$

$$\text{同理: } QA \cdot QY = \frac{AB \cdot AC}{BC^2} \cdot YB \cdot YC$$

$$\Rightarrow PA \cdot PX = QA \cdot QY \Rightarrow p(P) = p(Q) \Rightarrow OP = OQ$$

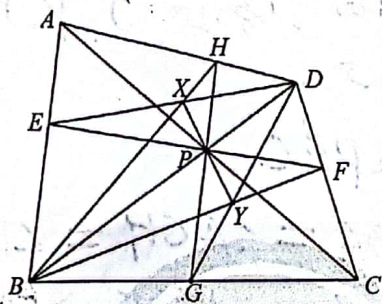


13. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle B > \angle C$, M 是 BC 的中点. BE , CF 是 $\triangle ABC$ 的两条高, K , L 分别为 ME , MF 的中点, 直线 KL 与过点 A 且平行于 BC 的直线交于 P . 求证: $PA = PM$.



KL是点圆M与圆P的根轴.
点P到两圆切线上相等.
 $\Rightarrow PM = PA$.

14. 设四边形 $ABCD$ 的两对角线 AC 与 BD 交于 P , 过点 P 作两条直线, 一条直线与 AB , CD 分别交于点 E , F , 另一条直线与 BC , AD 分别交于点 G , H , BH 与 DE 交于点 X , BF 与 DG 交于点 Y . 求证: X , P , Y 三点共线.



重定义点 Y : $\{Y\} = XP \cap BF$. 改证 D, Y, A 共线

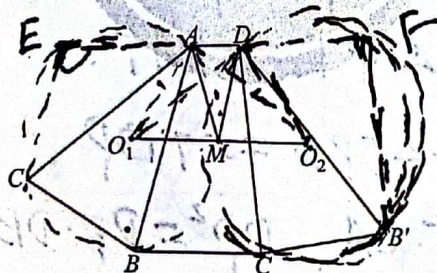
$$\frac{\angle BPG}{\angle GPC} \cdot \frac{\angle CPD}{\angle DPF} \cdot \frac{\angle FPX}{\angle YPB} =$$

$$\frac{\angle DPH}{\angle HPA} \cdot \frac{\angle APB}{\angle BPE} \cdot \frac{\angle EPX}{\angle XPD} = 1$$

$\triangle EDA$. 截线 HBX .

$\Rightarrow A, D, Y$ 共线

15. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 B 关于 CD 的对称点为 B' , 点 C 关于 AB 的对称点为 C' , O_1 , O_2 分别是 $\triangle AC'B$ 的外心与 $\triangle DCB'$ 的外心, M 是 O_1O_2 的中点. 求证: $MA = MD$.



$$\angle C'EA = 180^\circ - \angle ABC' = 180^\circ - \angle CBA$$

$$= 180^\circ - \angle EAB \Rightarrow EC' \parallel AB$$

同理 $FB' \parallel DC$.

$$\Rightarrow AE = BC' = BC = CB' = DF$$

$$\Rightarrow AD \cdot AF = DA \cdot DE \Rightarrow AO_2^2 - r_2^2 = DO_1^2 - r_1^2$$

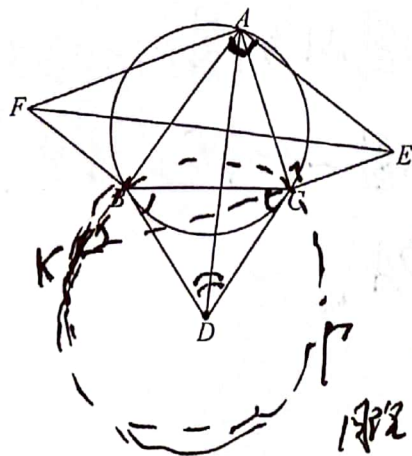
$$\Rightarrow \frac{r_1^2 + AO_2^2}{2} = \frac{r_2^2 + DO_1^2}{2}$$

$$MD^2 = \frac{1}{2}(r_2^2 + DO_1^2) - O_1O_2^2$$

$$\Rightarrow MA^2 = MD^2$$



16. 设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆在 B 、 C 两点的切线交于 D , 过点 A 且垂直于 AB 的直线与过点 C 且垂直于 AC 的直线交于 E , 过点 A 且垂直于 AC 的直线与过点 B 且垂直于 AB 的直线交于 F . 求证: $AD \perp EF$.



$$\begin{aligned} EA^2 &= EC \cdot EK \\ \angle K &= 90^\circ - A \\ \angle CDB &= 180^\circ - 2A = 2\angle K \end{aligned}$$

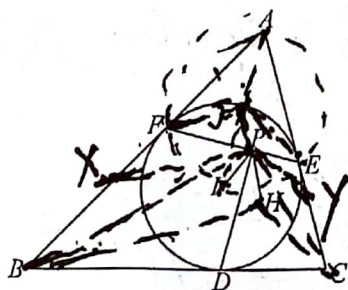
$DB = DC \Rightarrow D$ 是 $\triangle BCK$ 的外心.

E 在点圆 A 与圆 B 的根轴上.

同理, F 在点圆 A 与圆 C 的根轴上.

$\Rightarrow AD \perp EF$.

17. 设锐角 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC 、 CA 、 AB 分别切于 D 、 E 、 F , P 是 D 在 EF 上的射影, I 、 H 分别是 $\triangle ABC$ 的内心和垂心. 求证: PD 平分 $\angle IPH$.



I. J 为 EF 中点. 需证: J, P, H 共线.

J 是 $\triangle AEF$ 的外心.

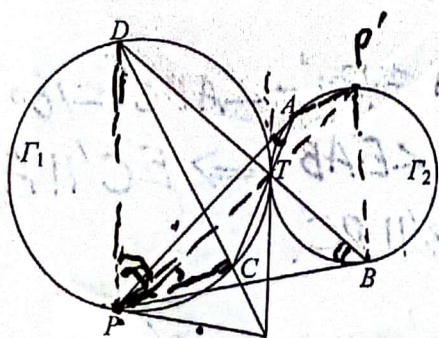
$\triangle PFB \sim \triangle PEC$.

$$\angle PXF = \angle HBA = \angle ACH = \angle EYP$$

$\Rightarrow X, Y$ 为 $\triangle PFB$ 与 $\triangle PEC$ 相似相似对应点 $\Rightarrow \frac{PX}{XB} = \frac{EY}{YC}$

J, P, H 共线.

18. 设圆 Γ_1 与 Γ_2 外切于 T , P 是圆 Γ_1 上一点(不在圆 Γ_1 与圆 Γ_2 的连心线上), A 、 B 两点在圆 Γ_2 上, 且 PA 、 PB 为圆 Γ_2 的两条切线, 直线 AT 、 BT 与圆 Γ_1 的另一交点分别为 C 、 D . 求证: 直线 CD 、圆 Γ_1 在 P 点的切线、圆 Γ_1 与圆 Γ_2 在 T 点的公切线, 三线共点.



$$AP' \parallel CP, \quad BP' \parallel DP.$$

$$\angle CPT = \angle AP'T = \angle PAT.$$

$$\angle DPT = \angle TP'B = \angle TBP.$$

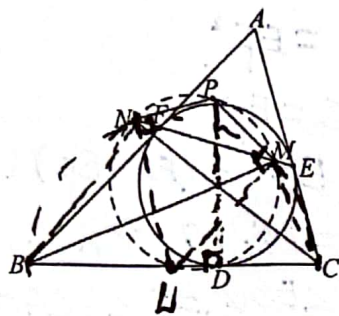
$$\Rightarrow CP^2 = CT \cdot CA, \quad DP^2 = DT \cdot DB.$$

CD 是点圆 P 与圆 Γ_2 的根轴.

求证: 三线是点圆 P 、圆 Γ_1 、圆 Γ_2 这三圆两两的根轴.

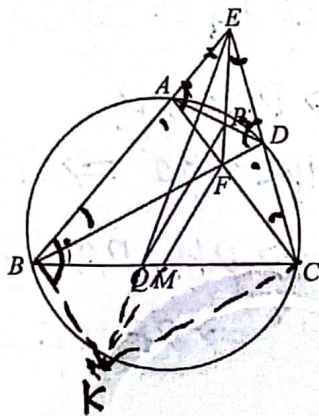


19. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与 BC 、 CA 、 AB 分别切于 D 、 E 、 F ， I 是 $\triangle ABC$ 的内心，直线 BI 、 CI 与直线 EF 分别交于 M 、 N ，过点 M 且垂直于 AB 的直线与过点 N 且垂直于 AC 的直线交于 P 。求证： D 、 M 、 P 、 N 四点共圆。



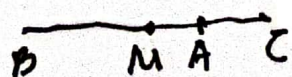
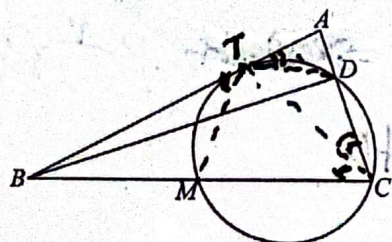
$MB \perp MC$, $NB = NC$ $LM \parallel AB$, $LN \parallel AC$
 M, N 均在以 BC 为直径的圆上. $MP \perp AB$
 $\Rightarrow MP \perp LM \Rightarrow MP$ 是切线. 同理 NP 亦是
 $\Rightarrow PI \perp BC$ $ID \perp BC \Rightarrow P, I, D$ 共线
 $\Rightarrow PD \perp BC \therefore \Rightarrow P, M, L, D, N$ 共圆

20. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，直线 AB 与 CD 交于 E ，对角线 AC 与 BD 交于 F ， EF 与 AD 交于 P ， M 是 BC 的中点， Q 是 BC 上一点，且 $\angle BEQ = \angle FEC$ 。求证： $PQ \parallel FM$ 。



E, Q, K 共线
 $\triangle EBK \sim \triangle EDF$ $\angle EDP = \angle QBE$
 P, Q 为其相似对应点 $\Rightarrow \frac{EQ}{QK} = \frac{EP}{PF}$
 $\Rightarrow PQ \parallel FK$ 即 $PQ \parallel FM$

21. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB + AC = \sqrt{2}BC$ ， M 是 BC 的中点，点 D 在 AC 上，且 $BD \perp AC$ 。求证：圆 (MCD) 与 AB 相切。



$BT = TA + AC$
 $BT^2 = \left(\frac{AB+AC}{2}\right)^2 = \frac{BC^2}{2} = BM \cdot BC$
 $\Rightarrow \angle BTM = \angle TCM$ $AD = AB \cos A$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2AB \cdot AC \cos A$$

$$= \frac{1}{2}(AB+AC)^2 + 2AD \cdot AC$$

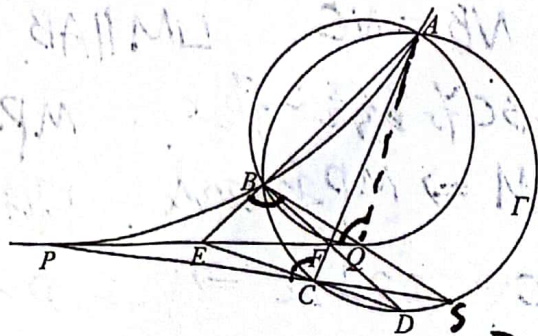
$$\Rightarrow (AB-AC)^2 = 4AD \cdot AC \Rightarrow AM^2 = AD \cdot AC \Rightarrow \angle DTA = \angle DCT$$

$$AB - AC = 2AM$$

$$\angle MTD + \angle DCM = \angle BTM + \angle MTD + \angle DTA = 180^\circ$$



22. 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 Γ , 直线 AB 与 CD 交于 E , 对角线 AC 与 BD 交于 F . 过 A, B 两点的两个圆与直线 EF 分别相切于 P, Q . 其中点 E 在点 P, F 之间. 求证: 直线 PC 与 QB 相交于圆 Γ 上.



$$EP = EQ.$$

$$P(E) + P(F) = EF^2.$$

$$EA \cdot EB - FA \cdot FC = EF^2$$

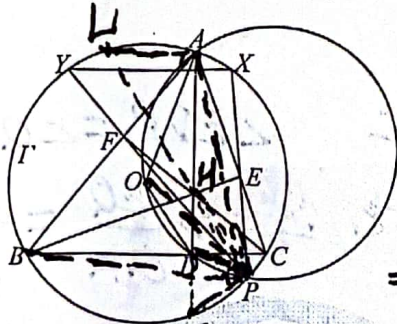
$$FA \cdot FC = EP^2 - EF^2 = (EP + EF)(EP - EF)$$

$$= FP \cdot (EQ - EF) = FP \cdot FQ \Rightarrow A, C, P, Q \text{ 共圆}$$

$$\Rightarrow \angle ACP = \angle AQP = \angle EBQ \Rightarrow \angle SCA = \angle SBA$$

$$\Rightarrow A, B, C, S \text{ 共圆}$$

23. 设 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心, AD, BE, CF 为其三条高, $\triangle ABC$ 的外接圆 Γ 与 $\triangle AOD$ 的外接圆交于 A, P 两点, 直线 PE, PF 与圆 Γ 的另一交点分别为 X, Y . 求证: $XY \parallel BC$.



$$\angle PKA + \angle DPK = \angle PDA = \angle POA = 2\angle PKA$$

$$\Rightarrow \angle PKA = \angle DPK \Rightarrow DK = DP.$$

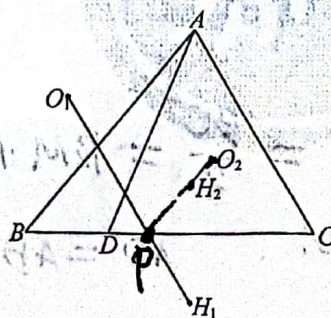
$$D \text{ 为 } HK \text{ 中点} \Rightarrow \angle HPK = 90^\circ \Rightarrow \angle A \parallel BC$$

$$\Rightarrow \angle LPB = \angle CPA \Rightarrow PH, PA \text{ 关于 } \angle CPB$$

$$\text{互为等角线 } BH \cap CA = \{E\}, BA \cap CH = \{F\} \Rightarrow PE, PF \text{ 关于 } \angle CPB$$

$$\text{互为等角线} \Rightarrow \angle CPX = \angle YPB \Rightarrow XY \parallel BC.$$

24. 设 D 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点, O_1, H_1 分别是 $\triangle ABD$ 的外心和垂心, O_2, H_2 分别是 $\triangle ACD$ 的外心和垂心. 求证: $O_1H_1 \parallel AC$ 的充分必要条件是 $O_2H_2 \parallel AB$.



$$\text{设 } O_1H_1 \cap BC = \{P\} \Rightarrow O_2P \parallel AB,$$

$$H_2P \parallel AB \Rightarrow O_2, H_2, P \text{ 共线.}$$

$$\Rightarrow O_2H_2 \parallel AB.$$

